

2008

Thesis for Doctor's Degree

山西大学

博士学位论文

张量概念的形成与张量分析的建立

作者姓名: 黄 勇

指导教师: 魏屹东 教授

学科专业: 科学技术史

研究方向: 数学史

培养单位: 科学技术哲学研究中心

学习年限: 2005年9月至2008年6月

二〇〇八年六月

山 西 大 学

2008 届博士学位论文

张量概念的形成与张量分析的建立

作者姓名 黄 勇

指导教师 魏屹东

学科专业 科学技术史

研究方向 数学史

培养单位 山西大学

学习年限 2005 年 9 月—2008 年 6 月

二〇〇八年六月

Doctoral Dissertation in the Year of 2008, Shanxi University

Origin of the Concept of Tensor and Establishment of Tensor Analysis

Name	Huang Yong
Supervisor	Wei Yidong
Major	History of science and technology
Field of Research	History of Mathematics
Department	Research Center for Philosophy of Science and technology
Research Duration	2005.9-2008.6

June, 2008

中 文 摘 要

张量分析在数学物理学中占据重要地位。由于广义相对论的成功，张量分析逐渐被人们所重视。更重要的是规范场论和弦理论的建立，张量分析被应用到了更加广泛的领域。而如此重要的数学分支的历史却极少被研究，这不能不说是一个很大的缺憾。在发掘、搜集、整理、分析张量数学的原始文献的基础上，运用概念分析的方法，梳理、研究、探讨了张量数学的发展史，得到了若干新的发现。

首先，找到了向量的代数定义的原始文献，这是张量数学发展史研究的中间链条。如果没有向量的代数定义，这种扩张量是无法超出三维情形的。而张量是一种高维的数学量，因此向量的代数定义是通向张量概念的非常重要的概念。在关于张量数学史的研究中，这是一个被忽略的内容。

其次，解读了张量概念的电磁学起源。从电磁学角度揭示了张量概念的物理学源头。而在过去，则一直把弹性力学作为张量概念起点，事实上，应用力学与张量概念的起源关系不大。论文最重要的发现是考证了第一个在现代意义上使用 tensor 的学者。

论文系统论述了张量分析的建立过程。从非欧空间观念、高斯的内蕴思想、黎曼的 n 维流形、格拉斯曼的高维空间观念、凯莱的 n 维向量空间开始，逐一陈述了张量数学的历史。张量分析作为解决曲线坐标系中微分运算的数学方法，是从高斯的内蕴几何开始孕育的。而第一个真正提出这个问题的是黎曼，他的 n 维流形的构想，具体地提出了弯曲空间中二次微分形式的变换问题，这是通向张量分析的起点。随后，经过贝尔特拉米、克里斯托夫、里奇等人的发展，这种方法终于得以建立。

作为补充，简述了张量分析的应用史。包括爱因斯坦、希尔伯特的引力场方程，以及外尔、列维-齐维塔的黎曼几何学。这里的新发现是考证了“黎曼几何学”这个名词的最早出处。

张量分析的产生，依赖 19 世纪的代数和几何的解放。正是非欧几何和抽象代数的出现，使得张量分析得以产生。而张量分析与黎曼几何的深入发展，极大地促进了现代数学的进步。这使得对张量数学史的研究具有深刻的意义。

关键词：张量分析；　曲线坐标系；　向量的代数定义；　黎曼流形；　协变系统

Abstract

Tensor analysis plays an important role in math and physics. People have regarded tensor analysis gradually, because of the success of general relativity theory. Moreover, tensor analysis has been applied in more fields due to the foundation of gage theory and subtense theory. But the theory had hardly been researched yet. However, this paper offers many new discoveries on the basis of digging, collection, arrangement and analysis tensor math original documents, and hackling, researching and discussion tensor math phylogeny by means of conception analysis methods.

First, original documents of vector's algebra definition has been found, Which is a clue for researching tensor math phylogeny. This expanding tensor cannot exceed three-dimensional condition without algebra definition of vector. Tensor is a higher dimensional math quantity, so algebra definition of vector is an important role for the foundation of tensor concept. But this content has been ignored in tensor math history.

Secondly, analyse electromagnetics origin of tensor concept. Expatiates the history process of tensor concept from electromagnetics origin. But in the past, the traditional ideas of tensor concept origin are from mechanics. In fact, applied mechanics does not have important relations with tensor concept origin. The most important discovery of the paper confirms the first scholar who uses "tensor" in modern sense.

Paper expatiates the foundation process of tensor analysis from non-Euclidean space ideas, Gauss' intrinsic ideas, n-dimensions manifold of Riemann, higher dimensional space idea of Grassmann, n-dimensions vector space idea of Cayley. As a kind of math methods to solve the problem of differential coefficient operation of curvilinear coordinates series, tensor analysis was origin from Gauss' intrinsic ideas. But Riemann is actually the first person advance this problem. His ideas of n-dimensions manifold advance quadratic differential form change problem of curved space in detail. This is the source toward tensor analysis. Subsequently, this method has been founded by the development of Beltrami, Christoffel, Ricci and so on.

By way of complementarities, the application history of tensor analysis is explained briefly, which include Einstein and Hilbert gravitational field equation, and Weyl Levi-Civita Riemannian geometry. The new discovery here is textual researches the earliest appearance of Riemannian geometry.

The creation of relies on algebra and geometry liberation in 19th century. Tensor analysis creates on the basis of non-Euclidean geometry and abstract algebra appearance. Moreover, tensor analysis and Riemannian geometry developed deeply which promotes modern math development further. This research makes a profound sense on tensor math history.

Key words: tensor analysis; curvilinear coordinates series; vector algebra definition; Riemann manifold; covariant system

目 录

Contents

导 论

张量的引入，使数学家们既采用坐标又摆脱具体坐标系的影响，使推导简化，而且能充分反映事物的属性。它在力学、几何学、电磁场及相对论等方面有着广泛的应用。

——费斯克尔

一 论文选题的意义

张量分析是如此重要，以至人人都要学，这就是微分几何总是从张量开始的原因。

——陈省身

张量分析作为近代数学向现代数学进化的开端之一，为现代数学物理学提供了工具。爱因斯坦和格罗兹曼最早实现了张量分析的物理意义，同时建立起引力的几何理论，从根本上改变了物理学的面貌。以张量分析为基础的黎曼几何学，已成为现代理论物理的基础工具。

也就是说，张量分析在现代数学及物理学中占有相当重要的地位。另一方面，从数学史研究的角度看，到目前为止，对这段历史的研究专著还很少，表现在：第一、冠以“张量分析史”为标题的专著还没有出现；第二、与这个主题有关的数学史著作中（比如几何方法史），涉及张量的部分也比较概括、简单；第三、数学通史的著作中，大多数没有提到这部分内容，偶有列出专门小节的，也是大致的论述；第四、相关的研究论文的主要是对爱因斯坦及其引力场方程的研究和分析，以及黎曼、贝尔特拉米、克里斯托弗、里奇、契维塔等重要相关人物的思想的个例研究。最重要的是，完全没有涉及到张量数学的电磁学起源。

因此无论从数学本身，还是从数学史研究的现状来说，这个题目都有研究的价值和意义。

二　关于张量数学的几个重要问题

1　什么是“张量”

关于“张量”一词的解释，《韦伯斯特大辞典》[①]的说法是：“一种广义向量，它有超过三个的分量，每个分量是特定维数空间中的任意一个点的坐标函数。”《美国传统词典》的说法则是：“遵循一定的从一个抽象的坐标系到另一个坐标系的变换法则的、与偏导数有关的一系列的数。”《现代汉语大辞典》[②]的解释是：“由两个坐标系中任一坐标系的 N^0 分量确定的不变量。可用含偏导数的一组 N^0 个方程将该坐标系中的分量变换成另一坐标系的分量。”无论是哪一本辞典，都没有交代 tensor 一词的辞源。.

张量是与标量和向量[③]相对来说的，或者说是向量的推广。在较为直观的意义上讲，标量就是绝对值，向量就是一个有向线段所代表的有理数。如果采用现代数学的方式来描述，标量是坐标变换下的不变量，也就是在任何坐标系中有相同的分量数值，反映的是这个量的固有性质；向量则是包含了正负的数值，而且它在不同坐标系中的分量数值不一定相等，这是向量与标量的区别。但是，向量在坐标变换的时候，将保持变换形式不变，这是用代数方式对向量的几何性质的本质揭示。众所周知，向量具有平移不变的几何性质，那么，用代数语言表示就是变换方程式可以交换。这样一来，向量所代表的量就既在坐标系中表达，但又不受固定坐标系的约束，很好地表达了自然界中事物所固有的性质。

在现代数学中，张量实际上是标量、向量、线性算子的母概念。张量可以在确定的坐标系下表达，但是又独立于任何选定的参照系，也就是说，张量不随坐标系变化。因为张量的这种特性，使得张量在力学中具有非常重要的应用。张量可以用分量形式的多维数组表示，这些带下标的分量需满足一定条件的坐标变换。在现代教科书中，张量被处理成向量（矢量）的自然推广。简单说，三维向量是有三个分量的多值函数，而三维二阶张量是有九个分量的多值函数。但是并不是只要把九个数写成矩阵形式就可以成为张量，而必须满足线性变换形式不变这个条件。也就是类似于向量这种平移和旋转的不变量，即在坐标系变换的时候，保持长度和方向不

[①] Webster's Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language 1994, dolithium press Ltd.　New York.

[②] 现代汉语大辞典．王同亿主编．海南出版社．1992.

[③] 物理学中将向量称为矢量。

变。

在历史上，张量概念几乎与向量概念同时产生。当时的情况是：在四元数理论向向量概念演进的同时，由四元数衍生出的抽象代数系统给出了通向张量概念的可能途径。

2 张量概念发展中的重要环节

现代版的张量数学的教材中，张量分析被逻辑地处理成向量分析的后续，这是顺理成章的，因为张量概念的确是在有了向量概念之后才有的。但是，张量分析却是与向量分析几乎同步地发展起来的（单从时间上看，也是这样的，都是从哈密顿开始，到 19 世纪末基本建立起来）。在原始文献中，有时无法确定哪些是张量分析方面的，哪些促成了向量分析的成熟。因此，我们不把向量分析作为张量分析的基础，只在必要的地方引出向量概念对张量概念的作用[①]。我们对历史文献采用单向度的选取，即只要与张量分析有关就把它纳入张量分析的发展史，而不去管它对向量分析有何作用。

从上文我们已经知道，张量延续了向量的最大特性：不随坐标系的变换而改变，这在历史上源于不变量理论的研究。从高斯开始，数学家非常关心一个代数式中有哪些量是本身固有的值，也就是那些量不会因为给字母带入不同的数而发生变化，代数式的判别式就是一种不变量。把不变量理论当成一个重要的数学分支开始于凯莱，凯莱把齐次多项式定义为一个代数形式，专门研究代数形式的不变量，而后，西尔维斯特作了大量工作。这方面的研究在微分几何学中有重要意义，因为微分几何的一个重要任务就是寻找曲线和曲面本身固有的性质，比如曲率就不随坐标系的变化而变化。坐标系改变在代数上等同于给代数式带入不同的值，所以不变量理论给微分几何创造了许多重要的方法，向量分析就被作为古典微分几何（三维直角坐标系中的曲线、曲面理论）的关键工具。

不变量理论自然也是张量分析的源泉之一。所不同的是建立张量分析所必需的不变量理论不再是代数形式的不变量，而要求研究微分形式的不变量。这是因为张量分析解决的是曲线坐标系（坐标轴是弯曲的）中的微分运算问题，这是张量分析与向量分析解决直线坐标系中的问题最大的不同。由于曲线坐标轴的基向量随处不同，所以需要考虑局部的性状，也就需要微分工具。

[①]比如向量的代数定义是建立张量概念的必要基础，所以在第一章专门列出小节分析论述。

对微分形式的研究开始于黎曼在 1854 年对微分几何学的一种构想。黎曼所处的时代已经为他准备好了革命性的思想，包括两个重要的方面：一个是高斯的非欧几何，高斯把一个曲面作为空间本身（所以是二维的），而不再把它嵌入到三维坐标系中，以曲面本身的参数建立方程，确定曲面的性质；另一个是凯莱和格拉斯曼的 n 维线性空间理论。黎曼把这两者综合起来，提出了 n 维弯曲空间的观念。他按照微分几何学的思路，认为只要构造出空间的度量形式（高斯已经成功地用曲面的基本参数计算出相关量），就可以确定空间的相关量：长度、角度、曲率等，很明显，这些量全是不变量。黎曼猜测这个度量形式是$\sum g_{ij}dx_i dx_j$，这是一个二次微分形式，在此之后，包括黎曼本人在内的数学家开始研究相关的问题，其中贝尔特拉米、克里斯托弗做出了重要贡献。

综合上面的论述，我们真切地感受到，张量分析的发展史与其他学科分支的历史有着很大的不同。在头绪繁多、错综复杂、交织互动的过程中，张量分析与黎曼几何学一起被建立起来，这是与向量分析完全不同的。在向量分析产生之前，多值函数理论和古典微分几何学已经很成熟了，向量分析只是把它们的表述大大简化了[①]；但黎曼几何如果没有张量分析，则根本不存在；另一方面，张量分析如果不是因为黎曼设想了一种非欧几何，是不会建立起来的。当然，历史的必然性是客观的，没有黎曼，会有别人。我们是从张量分析与黎曼几何的相对性这个角度来谈这个问题的。

张量数学的另一个发展路径是电动力学关于电磁场协变理论的研究。首先，tensor 一词就是哈密顿在讨论电磁学理论的时候第一次提出来的；其次，最早提出张量概念的物理学家明科夫斯基，也是在讨论电动力学的时候发现的；最后，最早用 tensor 指称张量的物理学家诺德斯托姆，同样是在电动力学领域作出的。这一条线索与微分几何方向上发展出的张量分析相比，既不系统，也没有最终找到协变微分方法。但是，物理学家至少在张量的命名方面做出了自己的贡献。

[①] 当然，由向量分析建立起来的场论与此不同，这里只在几何学的范围内进行比较。

三　论文的基本内容

1　张量概念的起源

张量分析是近代数学向现代数学进化的开端，它源自于十九世纪数学的深刻变革。十九世纪的数学在空间观念、微分运算、符号抽象等方面极大地进步了，这被数学史家称为“数学的解放”。张量概念的建立有两个重要的理论基础，分别由凯莱和西尔维斯特在矩阵论、黎曼在微分几何领域，提出革命性的观点和理论，他们改变了传统数学的发展方向：凯莱将矩阵论从方程论转向了变换理论，并开始了 n 维向量空间的研究；黎曼将内蕴几何对三维曲面的研究转向了 n 维流形的性质，从而将微分几何对曲线、曲面等几何对象的研究渐渐摆脱了直角坐标系，形成了直接在曲面上导找基向量建立坐标系的方法，进而建立了弯曲空间的概念。张量分析的产生一方面是向量分析的推广，另一方面是微分几何的发展推动的。

十九世纪初非常活跃的研究领域是这种转变的源动力，这些领域包括：

1、爱森斯坦、柯西关于方程论的理论，简洁地表达了方程组，为向量的代数化准备了工具。另一条线索是哈密顿提出四元数理论之后，由泰特和麦克斯韦发展出的向量分析，即建立在向量基础上的微积分运算，是解析几何之后，几何的代数化方面实质性的突破。这些领域的研究打破了三维、平直的欧几里得空间观念，为后来引进高维、弯曲的坐标系，以及曲线坐标系中的微分运算，奠定了基础。凯莱在前人的基础上研究不变量理论（invariant theory），建立了矩阵的完整理论，引进了现代意义上的行列式的代数表达方式。凯莱运用矩阵理论对线性变换的研究引进了向量的代数定义，而这正是张量概念的先导。

2、高斯建立在内蕴微分几何基础上的非欧几何理论。高斯不同于萨凯里、兰博特、波尔约、罗巴切夫斯基等人对非欧几何的研究，他从微分几何关于曲面的研究中自然地得出他的非欧几何概念，而不是和他的同辈一样局限在建立非欧几何的逻辑基础，高斯开拓了非欧几何的更有意义的研究方向。黎曼继承高斯的内蕴几何思想，提出 n 维流形的概念，从而提出了深入研究代数形式的课题。黎曼的几何思想在拓展几何学的同时，提高了代数在表达几何对象方面的抽象程度。黎曼之后，在克里斯托弗、里奇和列维-契维塔等人的努力下，形成了张量分析这样的数学方法，黎曼几何学也因此而建立起来了。

从 1840 年代，“数学的解放”开始了，解放的结果是代数与几何高度融合，其

中的一个方向发展出被称为“张量演算”（即曲线坐标系中广义向量的微分运算）的数学方法，这使得建立方程的能力大大提高了。

1.1 凯莱的向量代数定义

张量概念是19世纪代数学成就促成的质变，它的诞生推动了数学的现代化进程，是19世纪数学向20世纪数学发展的阶梯之一。这个时期数学的对象大大扩展，它的应用范围也大大扩展。比如，几何不仅研究物质世界的空间和形式，而且研究同空间形式和关系相似的其他形式和关系。产生了各种新“空间”：罗巴切夫斯基空间、射影空间、四维的黎曼空间、各种拓扑空间等，都成为几何研究的对象。现代代数考察的对象是具有更普遍的“量”，如向量、矩阵、张量、旋量、超复数、群等，并且研究这些量的运算。这个时期新的概括性概念的建立，达到更高的抽象程度。

张量概念的诞生，是现代数学产生的标志之一。一般来说现代数学时期是从十九世纪末开始的。随着科学技术和生产实践的需要，代数、几何、数学分析变得更为抽象，各数学基础学科之间、数学和物理等其他学科之间互相交叉和渗透，形成了许多新的学科。 这个时期数学家提出了许多新的理论，创立了许多影响巨大的分支。与这些数学分支具有相同重要性的是1901年由里奇和列维 契维塔建立的张量分析。

19 世纪的代数学已经体现出很高的抽象性，高斯开始的对代数形式的研究、凯莱对矩阵理论的研究、西尔维斯特对不变量理论的研究、格拉兹曼对高维空间的研究，开了抽象代数和代数几何的先河。

凯莱开创的矩阵代数在19世纪发展出抽象代数结构.凯莱以代数观点研究几何，他的方法建立在不变量问题基础上，对代数形式(齐次多项式)做出了几何解释，证明了度量概念能够用射影语言来表达。这些结论使得凯莱的几何学观点具有明显的代数特征，这不仅提高了数学的抽象化程度，而且开辟了新的数学领域：代数几何。

凯莱在数学上最早、最重要的工作之一，是创立不变量理论。凯莱在1843年发表《物体的旋转运动》一文，开始计算n次型的不变量，探求在线性变换下n次型的不变量——经线性变换后保持形式不变。凯莱的不变量理论建立在他独自发展的矩阵理论基础之上，凯莱的矩阵代数方法，扫清了数学进化的道路。这些工作逐渐导向了对线性变换新的研究途径。凯莱引入的n×n矩阵的特征方程的概念，成为凯

莱研究线性变换理论的先导。运用矩阵代数方法，凯莱对线性变换进行了研究，从而引向了向量的代数定义。

1841 年，凯莱在论文 *On a Theorem in the Geometry of Position* 中引进了矩阵的基本概念和运算。在此之后，凯莱系统研究了矩阵理论。他定义了零矩阵、单位矩阵；两个矩阵的和与积；给出了转置矩阵、对称矩阵、斜对称矩阵的定义与性质。

运用矩阵代数方法，凯莱对线性变换进行了研究，从而引向了向量的代数定义。这方面的工作总结在 *On linear transformations*（1846）和 *On the theory of linear transformations*（1845）两篇论文中。

在 1845 年论文中，凯莱研究了下面的问题：

如果函数 $U=\sum\sum(rs.x_r y_s)$ 通过替换

$$x_r=a_r^1 x_1'+a_r^2 x_2'+\ldots+a_r^m x_m'$$

$$y_s=b_s^1 y_1'+b_s^2 y_2'+\ldots+b_s^m y_m'$$

变换为：$U'=\sum\sum(r's'x_r'y_s')$，那么系数函数 a,b 应满足的关系。针对这个问题，凯莱在这篇 14 页的论文中，详细地研究了矩阵函数的特征值。这个工作为 1846 年论文作了基础工作。在 1846 年论文中，凯莱明确了向量的代数意义，即：对任意多函数的所有导数，使这些导数具有这样的性质：在变量的任意线性变换之后保持它们的形式不变。

凯莱的新思想导向了线性变换不变形式的研究，这篇论文的重要意义在于引进“协变”量[1]，而且通向了向量的代数定义。凯莱的结论揭示了向量在坐标变换下的不变性，从而为引进张量概念准备了代数基础：一方面他引进了线性变换的研究；另一方面，他对不变量理论的新方法提供了向张量数学发展的途径。事实上，里奇最终能够实现绝对微分学的张量表达，在很大程度上依赖凯莱的工作。

1. 2 黎曼的高维弯曲空间思想

十九世纪后半叶，几何学这种用来表征自然的语言正在发生着质的变化，产生这种变化的原因有三点：其一， 非欧几何思想的产生打破了空间平直的僵硬观念；其二， 向量分析建立起来，几何方法暨解析几何之后，有了新的实质突破；其三，黎曼发表划时代演说，高维、弯曲空间概念在黎曼、凯莱的代数层面研究之后，有了几何学的意义。在这样的背景下，新的几何学，也就是后来被称为黎曼几何的数

[1] “covariant”这个词是 J.J.Sylvester 引进的。

学分支开始了从概念阶段到可计算阶段发展的历程，而真正实现这个转变的是张量分析方法的建立。新几何学提供了这样一种方法：在高维的、曲线的坐标系中，如何进行微分运算。其中，最重要的是曲线坐标系的微分方法——绝对微分法的建立。现代科学自广义相对论之后的发展，尤其是弦理论的成果，充分证明了这种方法在表征自然方面的强大能力。

乔治　弗雷德里希　波恩哈德　黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866）开创的高维抽象几何的研究是几何史上一场深刻的革命，他提出的后来以其名字命名的几何体系，对现代数学和物理科学的发展产生了深刻的影响。1854年，黎曼为了取得哥廷根大学讲师的资格，作了一次题为《关于作为几何学基础的假设》演讲，这篇就职演说是黎曼几何学的源头。黎曼空间的概念，提出了n维微分流形的原始形式，从几何角度引进了抽象空间，与凯莱、西尔维斯特、格拉兹曼等人从代数角度建立抽象空间互相补充，揭开了现代数学的帷幕。黎曼创立的黎曼几何学，开辟了现代几何学，乃至现代数学的新路径。

黎曼主要研究几何空间的局部性质，他采用微分几何的途径，建立了一般的抽象几何空间。黎曼引入流形的概念，流形中的一个点可以用个可变参数的一组数值来表示，所有这些点的全体构成流形本身。这个可变参数称为流形的坐标，而且是可微分的。黎曼定义了流形上两点之间的距离、流形上的曲线、曲线之间的夹角，并以这些概念为基础，展开对流形几何性质的研究，并定义了度量曲面弯曲程度的曲率。

黎曼的深刻的思想打开了曲线微分运算的大门，他对流形的度量形式的微分运算，得到了给定空间的曲率。黎曼的新思想把通常熟悉的三维空间推广到n维空间中的m维可微流形，黎曼的高维空间思想发展了高斯的内蕴微分几何学的思想，他把高斯关于欧氏空间中曲面的内蕴几何推广为任意空间的内蕴几何。流形不依赖于外围空间，它本身是可以弯曲的，因此每一点在该空间中的局部不一定相同。这种空间的非欧性质提出了新的问题：传统的微分几何方法是在笛卡尔空间中进行的微分运算，坐标轴都是直线。而黎曼空间要求曲线坐标系，从而引起了微分运算的困难，因为直线坐标系中函数的偏微分是易于表达的，而曲线坐标系的基向量也要同时被微分，这是一个困难。要想解决这个问题，必须要有张量这个运算工具，因此，黎曼的思想在很大程度上推动了张量数学的产生。黎曼的几何思想能够最终实现，离不开贝尔特拉米的贡献，贝尔特拉米首先解决了微分形式不变量的相关问题。

黎曼将微分几何引向高维、弯曲空间，开辟了曲坐标系中的向量微分运算的求

解。黎曼关于任意维数的几何空间以及曲坐标中多变量微分的理论，导致了张量、外微分及联络等现代数学方法的建立。爱因斯坦以黎曼几何为基础，建立了几何化的引力理论。现在，黎曼几何已成为现代数学物理学的基础。

2　张量分析的建立：从曲率张量到绝对微分法[1]

1869 年，克里斯托夫通过建立以他的姓命名的两类克里斯托费尔记号和协变微分概念，解决了黎曼几何中的基本问题。在此基础上里奇发展了绝对微分法（后来称为张量分析方法），这在广义相对论中起了基本数学工具的作用。1915 年，爱因斯坦运用黎曼几何和张量分析工具创立了新的引力理论——广义相对论，使黎曼几何及其运算方法（里奇算法）成为广义相对论研究的有效数学工具。

克里斯托夫符号是对曲线坐标系中向量进行求导运算的符号。最早尝试寻找这种求导运算方法的是黎曼，在 1861 年的论文中[2]，黎曼计算了给定度量$\sum g_{ij}dx_i dx_j$的空间中曲率的计算方法，为此黎曼引进了一类特殊的量$p_{\gamma\epsilon}$，也就是类似于后来的克里斯托夫符号的表达方式。

黎曼开创的几何学的新思想在很大程度上影响了数学的面貌。“（黎曼）的分析技术包括度量和曲率张量，他在几何领域创造了富有意义的变革，并且改变了几何问题的前景。黎曼的观点主导了微分几何，直到嘉当学派引进活动标架法。”[3]

克里斯托夫直接继承了黎曼的思想，所不同的是，克里斯托夫虽然和黎曼一样是从二次微分形式开始的，但是他不是计算流形的曲率，而是考虑局部等价问题（the local equivalence problem）导出了协变微分公式[4]。克里斯托弗在 1869 年发表《二次微分形式的变换》[5]一文，开始研究克里斯托弗符号，这篇论文考察了两个 n 变量实二次微分形式互相变换的条件。克里斯托夫证明了等价变换是由一个点的初始值决定的。论文中克里斯托夫引进了曲率张量的分量R^{e}_{bcd}, R_{abcd}，并且建立了曲率张量（这里借用当时还未出现的名辞）方程。

克里斯托弗符号是对曲线坐标系中向量进行求导运算的符号。最早尝试寻找这种求导运算方法的是黎曼，在 1861 年的论文 *Commentatio mathematica,qua respondere*

---

[1] 张量分析的早期名辞。

[2] G. F. B. Riemann, *Commentatio mathematica,qua respondere tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae* (1861)　Bernhard Riemann，Gesammelte mathematische werke,collected papers, p423－455.

[3] G. F. B. Riemann, *Uber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen*(1854)　Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische werke,collected papers , p272—287.

[4] Covariant differentiation 这个词是 Gregorio Ricci-Curbastro 引进的。

[5] E. Portnoy , *Riemann's contribution to differential geometry,*　Historia mathematica,　9 (1982), p1－18.

tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae 中，黎曼计算了给定度量$\sum g_{ij} dx_i dx_j$的空间中曲率的计算方法，为此黎曼引进了一类特殊的量P_{ijk}，也就是类似于后来的克里斯托弗符号的表达方式。

这些结果为里奇建立绝对微分法准备了必要的前提，非欧几何的可计算阶段已经成为现实，黎曼几何也已经成形了。“克里斯托弗引进的这两个概念的重要意义至少在于：帮助建立曲率张量和协变微分概念；使得里奇可以借助他的工作发展出绝对微分学；使得爱因斯坦在物理学中构造张量分析方法。”[①]

1901 年，里奇和他的学生列维-契维塔（Levi-Civita）合写了《绝对微分法及其应用》，总结了里奇在这个领域的成果，成为张量分析[②]的经典著作。

1913 年，爱因斯坦和格罗兹曼在《广义相对论纲要和引力论》一文中首次使用“张量演算”一词，并为广义相对论提供数学基础。

1918 年，外尔首先提出“张量分析”一词，至此，“张量分析”完成了从数学结构到物理应用的全过程。

3　关于“tensor”的考证

“tensor”这个词汇的使用经历了一个较为复杂的演变过程。最初，哈密顿（William Rowan Hamilton，1805-1865）在 1846 年用“张量”来指“模（向量的长度）”，与现在的含义完全不同。在线性代数产生之后（1855 年以后），物理学家利用多重线性代数的方法，来解决电磁学中的变换不变性问题；而数学家则把多重线性代数理解为 n 维空间的数学模型，用来探讨非几里得的微分几何学的数学实现。当然，此时数学家和物理学家都没有使用“张量”一词，这个词的现代意义的使用，是在 1910 年由诺德斯托姆（G.Nordstrom）提出的。另一个几乎同时独立做到这一点的是劳厄（M.Laue），劳厄是福特（Woldemar Voigt ，1850-1919）的学生。福特是最早提出后来被称为洛仑兹变换的物理学家[③]，也是第一个用这种变换证明麦克斯韦电磁场场方程变换不变性的科学家[④]。福特的成果到了洛仑兹那里，产生了洛仑兹协变理论，这是通向广义相对论的阶梯。1910 年，诺德斯托姆建立了基于洛仑兹协变理论的引力理论，并首次使用“张量”意义上的 tensor。

[①] J. L. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Oxford, （1940）, p421.

[②] 在这篇论文中，“张量（tensor)”这个词还没有出现，论文中采用“协变系统”（Systemes covariants）这个词。

[③] W. Voigt, *"Ueber das Doppler'sche Princip"*, Gottinger Nachrichten, (1887), (vol.7): p41-51.

[④] W Voigt, *"Theorie des Lichts für bewegte Medien"*, in *Annalen der Physik*, (1888), 36: p370-396, p524-561.

张量概念的电磁学起源就是产生于洛伦兹变换。在方法上，物理学家与数学家的方法是一致的，即采用了不变量理论，但物理学家的目的是为了解决电磁学中的变换问题。所以严格地说，物理学家的“张量”属于多重线性代数的范畴，没有涉及分析学的问题，与里奇最早提出的“协变系统”（后来被爱因斯坦和戈罗兹曼称为张量分析）存在着差异。从这里我们看到，“张量”概念的产生与 tensor 的命名过程都比较复杂。

需要特殊说明的是，关于“tensor”这个词的来源，大多被认为源自力学中的“张力（tension）”。根据作者考证，哈密顿引进这个词的确跟“tension”有关，但是却与力学无关，哈密顿的 tensor 全部被用在了电磁学中。另外，tensor 的含义也与 tension 无关，而与 extension(扩张)有关[①]。

[①] 参看本文有关章节。

四 国内外研究现状

目前已有的相关研究著作不多，分别是：

1．*Mathematical thought from ancient to modern times* 第 48 章；

2．*A history of geometrical methods* 第 5 章；

3．*Mathematics of 19 century* 第 5 章第 10 小节；

4．*The history of modern mathematics*（II）中的一篇论文；

5．*1830-1930：A century of geometry* 中的一篇论文；

6．*Analysis, geometry and groups : a Riemann legacy volume* 中的一篇论文；

7．*A history of non-Euclidean geometry* 第 8 章第 3 小节；

8．*E.B.Christoffel:the influence of his work on mathematics and the physical sciences* 第 8 章；

9．*A history of mathematics* [①](B.Boyer)第 24 章第 6 小节。

这是目前检索到的全部相关著作。这些著作中，第 1 本、第 2 本和第 8 本较为深刻地分析了张量分析的最终形态，但是仅仅集中于里奇（C.G. Ricci，1853-1925）[②]的思想和成果，对其余的众多人物的思想和成果没有做出分析，更没有研究张量概念的起源。其余的著作基本上是概述性的论文，忽略的内容比较多。

在本文之前，只有两篇张量数学发展历史的概述性的论文：(1)、*The American contribution to the theory of differential invariants*,载于 The attraction of gravitation:new studies in the history of general relativity，这篇 23 页的论文概述了从高斯第一基本形式到里奇绝对微分学的发展历程。这篇论文的重点在论述美国数学家在张量数学建立过程中的作用。(2)、*From Riemann to Ricci: the origins of the tensor calculus*，载于 Analysis, geometry and groups : a Riemann legacy volume，这篇 18 页的论文从高斯开始，到里奇结束，概述了这段历史的面貌；而且既没有涉及电动力学对张量概念起源的作用，也没有涉及抽象代数方面。

期刊论文中对张量数学的历史全面性的研究，主要是针对张量分析中的片断数学成果的历史研究，也就是对建立张量分析所必需的数学知识的历史研究，这方面

[①] 这是为数不多的涉及张量分析或黎曼几何的数学通史，这种情况是很少的。比如 History of modern science and mathematics 这套多卷本、大开本的专著没有为张量分析或黎曼几何留下任何位置。一般的情况是对微分几何以及非欧几何作出专门的章节，但停留在黎曼几何之前。

[②] 最终建立起张量分析的意大利数学家。

已经积累了一些基础性的成果，但总起来说，对 19 世纪的数学的历史研究还是很不够的。大体上分为以下几类：

1) 关于非欧几何的历史研究

Gauss's geodesy and the axiom of parallels E. Breitenberger *Archive for history of Exact Sciences* vol.31 (3) 1984, 273-289

文章讨论了高斯在大地测量工作中，对平行公理产生怀疑的过程。

Non-Euclirean geometry——A re-interpertation J. Gray *Historia mathematica* 6 (1979), 236-258

文章将几何的发展划分为 18 世纪前的工作、非欧几何的先驱、非欧几何的奠基、后期发展四个阶段。作者认为非欧几何不仅提供了新的几何语言，而且通过建立常曲率表面的概念，使得非平直空间内的计算成为现实。

Non-Euclidean geometry from early times to Beltrami T. R. Chandrasekhar *Indian journal of history of science* 24(4) : 249-256 (1989)

文章粗线条地勾勒了非欧几何的发展历程。从 G. Saccheri(萨开里 1667-1733[意大利])、J. H. Lambert(兰贝特 1728-1777[瑞士])、A. M. Legendre(勒让德 1752-1833[法国])、F. Bolyai(波耶 1775-1856[匈牙利])开始，直到 K. F. Gauss(1777-1855)、N. Lobachevski(1792-1856)、J. Bolyai(1802-1860)，以及 G. B. Riemann(1826-1866)、S. Lie(1844-1899[挪威])，最后由 F. Klein(1849-1925)、E. Beltrami(1835-1900)、Clifford(1845-1879)建立起直观模型，非欧几何初步形成。

Beltrami's model and the independence of the parallel postulate M. J. Scanlan *History and philosophy of logic*, vol.9 (1988) 13-34

文章刻画了贝尔特拉米的非欧几何模型，讨论了平行公设的独立性。

Geometry at Cambridge, 1863-1940 Jeremy Gray *Historia Mathematica* 33(2006) 315-356

文章详细介绍了剑桥学派在非欧几何发展的关键时期对几何学做出的贡献。

.Lobachevsky: Some Anticipations of Later Views on the Relation between Geometry and Physics N. Daniels *Isis* 66 (231) (1975) 75-85

文章描述了罗巴切夫斯基对非欧空间与物理空间深刻关系的认识。

Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th

century Archive for history of Exact Sciences vol.49 (1) 1995 1-72

文章简述了高斯、哈密顿、刘维尔、李普希兹等人将微分几何应用于力学的过程，历史地讨论了非欧几里德动力学。

Gauss and the definition of the plane concept in Euclidean elmentary geometry K. Zormbala *Historia Mathematica* 23 (1996), 418-436

文章回顾了欧几里得对平面的定义，进而叙述了高斯的非欧几何思想。

2) 关于微分几何的历史研究

On Jacobi's Remarkable Curve Theorem J. M. Cleary *Historia mathematica* 21 (1994),377-385

雅克比关于可微曲线的理论是微分几何的重要发展，他的“绝妙定理”推进了高斯的同类工作。文章分析了雅克比的“曲线的球面理论”。

Gauss and the Arithmetic-Geometric mean D. A. Cox

Notices American mathematical society vol.32 (3) (1984) 147-151

算术几何方面的史料。

The "Essential Tension" at work qualitative analysis: a case study of the opposite points of view of Poincare and Enriques on the relationships between analysis and geometry G. Israel *Historia mathematica* 25 (1998), 379-411

文章比较详细地叙述了彭加勒在非欧几何、代数几何方面的工作。

The contributions of Carl Friderich Gauss to geomagnetism

G. D. Garland *Historia Mathematica* 6 (1979), 5-29

文章虽然是地磁学方面的，但从应用的角度例证了高斯的微分几何方法。

Das eindrigen des vektorkalkuls in die differentialgeometrie K. Reich *Archive for history of Exact Sciences* Vol.40 ,1989 (3) 275-303

3) 不变量理论的历史研究

Two turning points in invariant theory G. Rota *the mathematical intelligencer* vol.21 1999 (1) 20-27

文章教科书式地简单介绍了不变量理论，虽然以外尔为分界，但没有按照历史线

索讲解。

The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology

Archive for history of Exact Sciences vol.20 1979 1-189

文章分四部分：1）康托之前的维数观念、2）康托的维数悖论、3）证明维数不变量的早期努力、4）拓扑点集的出现。

Franco-Russian Engineering Links: The careers of Lame and Clapeyron, 1820-1830 M. Bradley *Annals of Science* 38 (1981), 291-312

文章介绍了拉梅在俄罗斯工作的十年间，在不变量理论方面的成果。

The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862) T.Crilly *Historia mathematica* 13(1986), 241-254

Knot invariants in Vienna and Princeton during the 1920s : Epistemic configurations of mathematical research M. Epple *science in context* 17(1/2), 131-164 (2004)

4) 相关历史人物的研究

"A proper spirit is abrod :" Peirce, Sylvester, Ward, and American mathematics, 1829-1843 E. Hogan *Historia Mathematica* 18 (1991), 158-172

文章介绍了 19 世纪中期，美国数学家的主要工作。

America's first school of mathematics research : James Joseph Sylvester at the Johns Hopkins University 1876-1883 K. H. Parshall *Archive for history of Exact Sciences* vol.38 1988 153—197

文章记述了西尔维斯特在霍普金斯大学工作期间，取得的成果。

Sulle origini del Calcolo di Ricci *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 53 1961 189-207

The Tragedy of Grassmann J. Dieudonne *Linear and Multilinear Algebra* 8 (1979) 1-14

文章简洁而深入地评介了格拉兹曼在 n 维向量空间代数和外代数方面的工作，并

从现代的观点指出格拉兹曼的不足。

The rejection of the Ricci tensor in Einstein's first tensorial theory of gravitation

G. Maltese *Archive for history of Exact Sciences* vol.41 1990 363—381

Making mathematics in an oral culture : Gotting in the era of Klein and Hilbert D. E. Rowe *science in context* 17(1/2), 85-129 (2004)

Origins of the analysis of the Euclidea algotithm J. Shallit *Historia mathematica* 21(1994), 401-419

Dio e l'uomo nella matematica di Kronecker *Historia mathematica* 13(1986), 255-276

Algebraic research schools in Italy at the turn of the twentieth century : the cases of Rome, Palermo, and Pisa L. Martini *Historia mathematica* 31(2004), 296-309

Hermann Weyl's analysis of the "Problem of Space" and the origin of Gauge structures E. Scholz *science in context* 17(1/2), 165-197 (2004)

Levi-Civitasche parallelverschiebung, affiner Zusammenhang, Ubertragungsprinzip: 1916-1922 K. Reich *Archive for history of Exact Sciences* Vol.44 ,1992 (1) 76-105

Ether and theory of elasticity in Beltrami's work R. Tazzioli *Archive for history of Exact Sciences* Vol.46 ,1993 (1) 1-37

Non-Euclidean geometry and Weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras T. Hawkins *Historia mathematica* 7 (1980), 289 -342

Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873-1941) P. Nastasi *Historia mathematica* 32 (2005), 203-236

Un demi-siecle de fractales: 1870-1920 L. Chabert *Historia mathematica* 17(1990), 339-365

James Joseph Sylvester M. Noether *Mathematische Annalen* 50 (1898), 133-156

Gauss as a geometer H. S. Coxeter *Historia Mathematica* 4 (1977),

379-396

文章记述了高斯在微分几何方面的工作。

Riemann's contribution to differential geometry E. Portnoy

Historia mathematica 9 (1982) 1-18

文章以黎曼 1868、1876 的两篇论文为核心，讨论了黎曼的思想对克里弗德、李普希兹、克里斯托弗等人的影响。

Hermann Grassmann and the creation of linear algebra D. F. Sander

The American mathematical monthly vol.86 (10) (1979) 809-817

文章介绍了格拉兹曼对线性代数的奠基性贡献。包括定义内积、建立线性变换规则、向量概念代数化等。

The Geometry of knowledge: lewis, Becker, Carnap and the formalization of philosophy in the 1920s A. Richardson *Studies in history and philosophy of science* Vol. 34 (2003) 165-182

文章讨论了当代哲学与自然科学——尤其是数学物理学——的互动，以 Buchdahl、Lewis、Carnap、Becker 等人的工作为蓝本，初步提出了当代哲学在非欧几何观念背景下的作为，以及现代知识几何化的实质。

The Philosophical and Methodological Thought of N. I. Lobachevsky

V. YA. PERMINOV *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 5 (1997), pp. 3-20.

文章以十九世纪的数学哲学为背景，论述了罗巴切夫斯基对数学本质和对非欧几何的认识。

The philosophical views of Klein and Hilbert D. E. Rowe

the Intersection of history and math. 15 (1994) 187-202

文章比较了希尔伯特和克莱因与外尔不同的数学思想，并进行了哲学的分析。

Einsein, Nordstrom and the early Demise of scalar, Lorentz-Covariant theories of gravitation *Archive for history of Exact Sciences* vol.45 1992 17-94

文章记述了自 1905 年以后，Nordstrom 关于洛仑兹变换引力理论的产生、修改，以及爱因斯坦对该理论的批评。本文提供了爱因斯坦在 1912 年关于引力论认识的史料，是黎曼几何、张量分析发展史的重要历史资料。

The structure and interpretation of cosmology: general relativistic

cosmology G. McCabe *Studies in history and philosophy of modern physics* vol.35 (2004) 549-595

这篇论文从物理学的角度讨论了弗里德曼方程、宇宙膨胀、暗能量等宇宙学问题。

Geometry, pregeometry and beyond D. Meschini *Studies in history and philosophy of science* vol. 36 (2005) 435-464

文章比较全面地探讨了现代数学物理学的众多分支的相关问题，试图对广义相对论中的几何、时空流形坍缩、量子力学非局域相关、量子引力、离散时空等问题找到其几何解释。

Einstein and general relativity : Historical perspectives

S. Chandrasekhar *American Journal of Physics* vol. 47 1979 (3) 212-217

文章主要讨论广义相对论所引起的各种反应。

Varistional Formulation of General Relativity from 1915-1925

V. belinski *General Relativity and Gravitation*, vol.14, 1982 (3) 243-254

文章讨论了四维流形变分原理和仿射度量，并进行了历史透视。

Einstein and Hilbert : Two Months in the History of General Relativity

J. Earman *Archive for history of Exact Sciences* Vol.19 ,1978 (3) 291-308

文章记述了爱因斯坦通向场方程的途径，以及对希尔伯特的理论的观点，是黎曼几何和张量分析的重要史料。

Mathematical studies of the field equations *General relativity and Gravitation : proceedings of the 17th international conference* (London) 2005 199-209

文章简要讨论了宇宙膨胀、引力坍缩、动力学历程（dynamical horizons）、约束方程、规范选择（gauge choices）、质量、相对论性弹性力学等问题。

Electrodynamical origins of Einstein's theory of general relativity

F. R. Hickman *International Journal of theoretical physics* vol. 23 1984 (6) 535-562

文章历史地记述了引力理论的发展过程：从引力的向量理论到爱因斯坦的张量理论。

The origins of Einstein's use of formal asymmetries P. H. Byrne

Annals of science, vol.38 (1981) 191-206

文章对爱因斯坦的非对称方法进行了讨论，包括在热力学第二定律、引力等方面的应用，以及非对称方法的意义。

Some unnoticed publications by Einstein M. J. Klein *Isis* vol.68 1977 601-604

关于爱因斯坦 1906 年工作的简短史料。

Einstein's impact on the physics of the twentieth century D. Giulini *Studies in history and philosophy of modern physics* vol. 37 (2006) 115-173

文章历史地讨论了广义相对论早期发展历程，描写了彭加勒对这个理论的贡献。

Einstein and the physics of the second half of the twentieth century 杨振宁 *Selected studies: physics, mathematics history of science* (Oxford 1981)139-146

文章对爱因斯坦之后的统一场论、物理学的几何化、理论物理学的方法等问题进行了探讨。

How Einstein Found his Field Equations *Einstein and the history of General relativity* C. Cattani (Boston, MA, 1989), 63-159

文章描述了爱因斯坦从最初采用里奇张量，到后来放弃，转而与格罗兹曼合作寻找建立引力场方程合适的张量的过程。

The relativity of discovery : Hilbert's first note on the foundations of physics T. Sauer *Archive for history of Exact Sciences* vol.53 1999 529---575

文章分析了爱因斯坦发现场方程的过程中，在多大程度上受到了希尔伯特的工作的启发。

五 思路、研究方法、创新点和不足之处

1 思路和研究方法

本文遵循的科学史学方法是柯瓦雷的概念分析方法，也就是说抱有这样的信念：数学是不断进步的，而这种进步是通过数学概念、数学思想的接力完成的。一旦采取了这样的基本路线，同时也就承认了一个基本事实：数学必须被理解，而史实一定能够被挖掘出来。这与萨顿对科学及科学史本质的理解是相同的，一切科学都是实证性的知识体系。

有两点需要说明：1.数学的接力式发展不是一根环环相扣的链条，相反，往往表现为多头并进，相互缠绕的过程。一个概念刚刚出现，相关的计算还没有形成，比它更复杂的概念已经随之而来，比如向量概念和张量概念就是如此。2.数学的实证性不是很明显，但是由于不同的人，采用不同的计算系统，居然会得出同样的结果，这正是数学的实证性的表现。

在本文的写作过程中，坚持一个原则：数学本身能够揭示出概念的根源，而忽略数学家生活的社会在怎样的程度上影响了数学的进化。19世纪数学的抽象化程度非常之高，远远超过了18世纪，但是这种进步背后的原因不像17世纪近代科学产生之初，生产实际对科学提出许多迫切需要解决的问题那样直接推动了近代科学的产生。这或许是因为科学的巨大成功，为数学家创造了极其宽松的思维空间；抑或是因为第二次工业革命对科学的发展起了间接的推动作用。但不管怎样，数学的成果更多地是数学家的智力活动所创造出来的。

2 创新点

本论文是十九世纪数学非常重要的分支——张量分析的历史研究，这本身就是一个创新性的论题。如霍尔顿所说，十九世纪数学史是一个不能轻易进入的领域，这个时期数学的抽象程度远远超过十八世纪。事实上，国内外对1890年代以后西方数学史的研究相对其它时期要少许多，专著更是少之又少。

本文中用仿宋体写出的摘录，全部来自一手的原始文献，而不是转引自其它的二手资料。具体来说，本文的创新点有以下几个方面：

1). 考证了 tensor 一词的流变，纠正了传统观点对 tensor 一词起源的若干错误认识；发现现代意义上的 tensor 是诺德斯托姆最早使用的，而不是M.克莱茵所说的爱因斯坦。

真实的情况是：1910年诺德斯托姆在《电动力学》一文中，从电磁学的角度发展出张量的概念，并使用了“张量”意义上的 tensor。直到1913年，爱因斯坦才在《广义相对论原理和引力论》一文中使用 tensor 一词。

2)． 发现了凯莱的“向量的代数定义”，为张量概念的形成找到了很重要的发展链节。如果没有从代数角度对向量的研究，向量是不可能推广到张量的。用笛卡尔坐标系表达的向量无法突破三维的情形，更重要的是，用几何方式表达的平移不变性如果不改造成代数的表达模式，不可能提高量的阶数，从而不能产生张量概念。而在以前的张量史研究中，没有与此相关的内容。

3)． 改变了过去一直认为的张量概念来源于力学的传统认识，提出了“张量概念的电磁学起源”的观点。对张量数学史的研究，一般是从微分几何的角度进行论述，没有涉及到电磁学对张量数学产生的重要作用，而这是本论文较为重要的部分。

4)． 考证了 Riemannian geometry(黎曼几何学)和 tensor analysis(张量分析)这两个名词的出处。

3 不足之处

1)．对每个相关历史人物思想的论述集中在他们的原始论文上，缺少对他们的书信的研究。这主要是因为这部论文想要清楚地勾勒张量概念以及 tensor 一词的历史面貌，对主线之外的内容尚未涉及；另外，书信等文献在国内不容易找到。所留缺憾将在未来的工作中逐一弥补。

2)．对张量数学每一个思想的历史承接关系，以及每一个历史人物的相互影响，仍有待进一步研究。尽管论文在前人研究的基础上对张量数学的历史作了较为完整的分析论述，但仍有众多做出贡献的历史人物没有涉及到，遗留问题将在以后逐步进行研究解决。

3)．张量数学中有一个很重要的概念：对偶空间，但是本文未能对此得到相关的历史发展线索。据作者现有的研究，对偶空间概念很可能是在其他数学领域的研究中得到的，这只有在未来的研究中扩大范围，寻找这一历史线索。

4)．张量数学有一个很重要的应用领域：应用力学，但是本文第五章仅讨论了张量分析在广义相对论和黎曼几何学中的应用，没有涉及到应用力学的领域。这主要是因为张量数学是与广义相对论和黎曼几何学相伴生的，而应用力学则是在张量数学

完全成熟之后借用了这种方法[1]。对于一部考察张量数学发展史的论文，选择与之产生和形成有关的内容更具有史学上的意义。对于没有涉及到的内容，将在以后的研究中填补。

[1] 认为张量分析的产生与应用力学无关，是本文重要的观点。

第一章　流形理论：张量概念形成的几何学进路

几何学的特殊价值在于它强大的有效性，这种有效性一方面依赖它的空间参照，另一方面由于它的理性结构。

—— J.L. 理查德

张量的引入，使数学家们既采用坐标又摆脱具体坐标系的影响，使推导简化而且能充分反映事物的属性。张量作为一个在广义坐标系中表达的数学量，与几何学，尤其是微分几何学存在最为直接的关联。事实上，张量概念的起源在很大程度上依赖高斯的内蕴微分几何思想。从现在的眼光来看，张量数学的绝大多数内容是和黎曼几何交织在一起的，而黎曼在构想这样一种与欧几里得几何学有着本质区别的几何学的时候，是直接从高斯的思想开始的。

我们在赞叹广义相对论的精确性的时候，必然会感受到，把平直空间改造成弯曲空间的黎曼氏非欧几何学，使我们从根本上改变了对自然的认识。至少，我们获得了一种复杂得多的数学方法，以至于我们有能力解决更加特殊的问题，包括宏观和微观的各种场论问题。如果没有曲线坐标系的出现，没有这种广义坐标系中的相关数学运算，现代科学是无法想象的。以张量分析为基础的黎曼几何学已经成为理论物理学的核心框架，物理学在异常抽象的程度上数学化了。

粗略地说，张量分析是由于黎曼提出了一种非常一般化的空间模式，也就是一种广义的坐标系之后，人们自然要找到这个坐标系中的相关运算的方法，尤其是微分运算，而逐渐形成的。然而，由于在对曲线的坐标系中的函数进行微分的时候，形式会变得很复杂，这是因为曲线坐标系的基向量是变化的。为了找到这种所谓“绝对微分”或称为“张量分析”的运算方法，是自黎曼提出“内蕴的”n 维流形之后，数学家不断地努力，最终建立起来的曲线坐标系中的微分方法。这种非常一般的坐标系使得一些很复杂的方程可以用相当简单的形式进行表达，更重要的是，使得过去一些无法建立方程的自然现象得以数学化表达。

这一章的核心内容，就是历史地研究作为张量分析起点的“流形”概念，以求得“流形”的来源及内涵，它同时是张量概念的起点之一。

第一节　弯曲空间观念的形成：黎曼"流形"的渊源之一

19世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何的发现。

——D. 希尔伯特

如果没有抽象空间，张量无存在之所。而抽象空间的形成，是在一系列的空间观念变革的过程中产生的。追溯历史，我们清楚地看到，空间观念的变革，是随着几何学的发展而展现的。我们根据几何学各个阶段的特点，将它的历史分为这样几个阶段：1）欧几里得几何。研究在刚体运动下不变的图形，如全等等问题。2）解析几何。将图形数量化，以代数学作为研究几何学的工具，能够研究二次曲线、二次曲面的性质，以及它们的不变量，即不依赖于坐标系的选取，得出与图形的位置无关的性质，可以区分图形的形状等内在固有的性质。3）微分几何。以微积分为工具，研究一般的曲线和曲面，找出决定曲线、曲面形状的不变量系统（如曲率、挠率）。4）黎曼几何。以张量分析为工具，实在地发展了内蕴几何的思想，建立了弯曲空间的概念，真正实现了非欧几何的理论框架。5）整体微分几何。超越三维空间的情形，发展了活动标架法、外微分形式等一系列重要工具，研究变换群的不变量，并与Lie群相结合，得出了许多深刻的结果。

1　非欧空间观念的形成——张量数学的萌芽

我已得到了如此奇怪的发现，使我自己也为此惊讶不已：我已从乌有中创造了另一个新世界。

——J. 波尔约

广义地讲，凡是涉及非平直空间的几何学都是非欧几里得的，比如球面几何学就不是一种欧氏几何，但是球面几何学并没有改变人们的空间观念，所以球面几何不被认为是非欧几何的一种。球面几何学自古希腊数学家门内劳斯（A.Menelaus，约98年）开始，就已经有了很丰富的成果，但是球面几何学在空间观念上仍然是欧几里得性的。球面只是欧几里得空间中的一个曲面而已，与空间观念无涉。不过，虽然弯曲空间这种非欧几里得的空间形式是在高斯创做"内蕴几何"之后形成的，但是由于高斯的"内蕴思想"与他的大地测量工作有一定的关系，而且高斯对地图绘制中球面到平面的映射非常关注，有重要的成果，因此，球面几何学在一定程度

上帮助数学家建立了非欧空间观念。

与其他所有的科学发展相同，非欧几何的空间观念形成的过程也是弯曲曲折、几回几转的。非欧几何的发展线路由欧几里得第五公设（即平行公设）引导，从欧几里得几何诞生起，就有很多人想证明其中的第五公设，人们怀疑它是否是一个公理。这样的研究持续了一千多年没有结果，到了18世纪，有人想到用反证法去证明它。为了寻找这种矛盾，18世纪已经有一些学者，从第五公设不成立的前提出发，深入地发展了一些推论，其中有萨凯里（J. G. Saccheri, 1667-1733），兰伯特（J. H. Lambert, 1728-1777）等人[①]。到了19世纪上半叶，人们终于认识到，否定平行公设将引出新的几何，新的平行公设是：

（1）在平面内过已知直线外一点，有两条以上的直线与已知直线平行。

（2）平面上任何两条直线都相交。

1829年，俄国喀山大学教授罗巴切夫斯基(H. N. Lobachevsky, 1792-1856)在证明第五公设的过程中，提出了一个和欧氏平行公理相矛盾的命题，与欧氏几何的前四个公设结合成一个公理系统。1826年2月23日，罗巴切夫斯基于喀山大学物理数学系学术会议上宣读了他的第一篇关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》[②]。这篇首创性论文的问世，标志着非欧几何的诞生。罗巴切夫斯基建立的非欧几何是人类认识史上一个富有创造性的伟大成果，它对人类时空观念的变革产生了深远的影响。他进行的一系列的推理，得出的一个个直观很难理解，但在逻辑上毫无矛盾的命题，导致了新的几何理论，现在称为罗巴切夫斯基几何，这是第一个被提出的改变空间观念的非欧几何学。

几乎与罗巴切夫斯基同时，1832年，匈牙利数学家J. 波尔约(Janos Bolyai)也发现了平行公设的不可证明性和非欧几何的原理，他的发现作为附录发表在他父亲F. 波尔约(Farkas Bolyai)的几何著作中，论文的题目是《绝对空间的科学》[③]。

1868年，意大利数学家贝尔特拉米发表了著名的论文《非欧几何解释的尝试》，证明非欧几何可以在欧几里得空间的曲面（例如拟球曲面）上实现。这就是说，非欧几何命题与相应的欧几里得几何命题是一一对应的，欧几里得几何无矛盾，那么非欧几何也就自然没有矛盾。

关于非欧几何的历史，已经有很多文献进行了详细的研究，这里，我们选择一

[①] J.L. Richards "The geometry traditon: mathematics, space, and reason in the nineteenth century." *The Cambridge history of science*, 5(2003), p464.

[②] N. Lobachevsky, in *O nacalax geometrii*, 1829, Kazanskij, p185-261.

[③] J.Bolyai, *La science absolue de l'espace*, 1832, Maros, p189-248.

个没有被注意到的例子，来说明非欧几何的内容和特点，那就是凯莱的《论非欧几何学》[①]。凯莱写道：

我将在三角学中，以度量距离和角度的方法，来表明非欧几何系统。我明确使用平面中的双曲几何为示例，考察单位圆和其中的点，以建立新的几何。

由于是单位圆，因此圆中任意点到圆心的距离等于一个角的正弦，即：

$$OA, OB, OC = \sin p, \sin q, \sin r$$

$$OA', OB', OC' = \sin a, \sin b, \sin c$$

由此得到：

$$2\cosh\alpha = \sqrt{\frac{BI\cdot CJ}{BJ\cdot CI}} + \sqrt{\frac{BJ\cdot CI}{BI\cdot CJ}} = \frac{BI\cdot CJ + BJ\cdot CI}{\sqrt{BI\cdot BJ}\sqrt{CI\cdot CJ}}$$

再根据上面的前提，我们有 $BI\cdot BJ = \cos^2 q$，$CI\cdot CJ = \cos^2 r$，因此：

$$\cosh\alpha = \frac{\cos^{q} + \cos^2 r + a^2}{2\cos q\cos r}$$

同理：$\sinh\alpha = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos q\cos r}$

对于一个角来说，我们定义：$A = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\sin BAI\cdot\sin CAJ}{\sin CAI\cdot\sin BAJ}$

[①] A. Cayley, On the Non-Euclidian geometry, in Mathematics Annalen, vol.v. 1872, p630-634.

因此：$2i\sin A=\dfrac{\sin BI\sin CJ-\sin BJ\sin CI}{\sqrt{\sin BI\sin BJ}\sqrt{\sin CI\sin CJ}}$

这个公式与欧几里得空间中的同类公式是不同的，需要指出的是，双曲几何本身就是一种非欧几何，在狭义相对论的洛仑兹表述中，采用的就是双曲几何语言。这在某种程度上说明，在19世纪中后期，数学和物理学同时在向张量概念接近，第三章中关于张量概念的电磁学起源将更清楚地表明这一点。

与欧几里得空间不同的空间建立之后，引起了空间观念的变革，而这在张量概念的产生过程中具有奠基性的作用，几何学也重新回到了起点。非欧几何突破了平直空间的传统观念，为高斯提出弯曲空间打下了良好的基础，为更广泛的黎曼几何的产生创造了前提。接下来要做的是：构造非欧的坐标系、建立非欧坐标系中的微分运算、依据这种微分运算重建微分几何学。这个工作由高斯发起，经黎曼发展，最终在里奇手中完成了张量分析，真正意义上的非欧几何学——黎曼几何学诞生了。

非欧几何被希尔伯特誉为19世纪最有启发性、最重要的数学成就，它与这一时期创立的近世抽象代数一起，改变了人们处理数学问题的观点和方法，迎来了数学发展的新时代。非欧空间观念的建立本身没有实质性的使用价值，如果没有高斯采用内蕴几何的方式将一个曲面看作一个空间，那么非欧几何也仅具有概念性的意义，不能从根本上建立起曲线坐标系中的微分运算，而这是非欧空间带给人们最大的礼物。下面我们来论述高斯在哪些方面促进了几何学，以至于整个数学的革命性变革。

2　弯曲空间的首次探索——张量分析的几何学基础

本世纪（19世纪）的数学以创新的科学思想产生的几乎每一件东西，都是与高斯密切结合在一起的。

—— L. 克罗内克

张量概念的几何学起源是弯曲空间的观念，弯曲空间观念来源于衔接古典微分几何与黎曼几何的高斯内蕴几何。高斯提出，在三维空间，曲面可以只用两个独立变量表示。将曲面作为二维空间考虑，它的性质已经不再有欧几里德几何的特点。例如在球面上，点的位置可以有经度和纬度确定；球面上没有直线，球面的几何性质与平面上的几何性质根本不同。高斯曾证明，曲面上的几何关系可以通过曲面上的丈量工作获得；曲面上的几何关系可以在曲面上独立陈述，既不必籍助于三维空

间，也不依赖曲面上坐标的选择。高斯提出了一个全新的概念：一张曲面本身就是一个空间，这个概念随后为黎曼所推广。并且由此确立了罗巴切夫斯基几何的“合法”地位，从而在非欧几何中开辟了新的发展道路。事实上，张量数学的精髓恰恰在于对弯曲非欧几里得空间中的曲线进行微分运算，高斯的内蕴几何开辟了弯曲空间的几何学研究。

在高斯之后，黎曼发展了高斯的内蕴几何思想。1854 年，黎曼为了取得哥廷根大学讲师的资格，作了一次题为《关于作为几何学基础的假设》演讲，他在这篇就职演说中提出了一般空间（即非平直的弯曲空间）的度量形式。这是以高斯的内蕴几何为基础的一种新的几何学思想，这个设想后来经过贝尔特拉米、克里斯托弗、里奇等人的努力，建立起弯曲空间中的微分运算（即张量分析方法），发展出黎曼几何学。在这篇演说中，黎曼将曲面本身看成一个独立的几何实体，而不再把它看作欧几里得空间背景中的几何对象。他发展了空间的概念，提出现代 n 维微分流形的原始形式，为用抽象空间描述自然现象奠定了基础，而这一切都是张量概念产生的内在动力。

张量分析的起点总要被追溯到高斯那里，这是因为高斯开创了一种将曲面本身作为空间的几何学新思想，即内蕴几何，这成为黎曼打开张量分析之门的核心思想。概而言之，张量概念的源头是黎曼的空间度量形式，而黎曼提出其度量形式是基于高斯的内蕴几何思想，我们来分析历史资料，厘清张量赖以存在的空间是如何形成的。

2.1 高斯内蕴思想的来源

高斯的内蕴几何思想来源于他的测地工作。1815 年前后，中欧各国开始大规模的大地测量。1816 年，舒马赫应丹麦政府之请，测绘全丹麦的地理形状，他请高斯协助。高斯于 1818 年开始担负丹麦的测地工作，并开始参加艰苦的野外测绘，并对所获数据进行分析整理。实测数据的后期计算由高斯一人承担，而每年撰写的测地报告后汇集于《利用拉姆斯登仪观测所确定的格丁根与阿尔唐纳两天文台之经度差》[1]。

[1] C.F.Gauss, Bestim-mung des Breitenunterschie des zwischen den Sternwarten von Gottingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector, 1828.

高斯全力关注测地工作的十年(1818—1828)，是他创造活动的高峰期。1827年，高斯写成《曲面的一般研究》[1]。他积10多年思考测地问题而提出了内蕴几何的新观念，他在这篇文章里提出一个全新的概念，将一张曲面本身看作一个空间，他强调曲面上只依赖于第一基本形式的一些性质，例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上一区域的面积、测地线、测地曲率和总曲率等等，称之为曲面的内蕴性质。他的理论奠定了曲面论的基础，并决定了这一学科发展的基本方向，直到今天仍是微分几何研究的源泉。

关于高斯的测地工作的历史研究已经积累了较多的资料，基本上形成了两种相反的观点。一种观点认为高斯的测地工作是为了验证现实世界的几何学是非欧几里得性的[2]，比如M.克莱因说："为检验欧几里得几何和他的非欧几里得几何的可能性，高斯实际测量了由布罗肯（Brocken）、霍恩哈根（Hohenhagen）和因塞尔斯堡（Inselsberg）三个山峰构成的三角形的内角之和。[3]"；另一种观点持相反态度，认为前一种观点是"传说"、"神话"、"想象"，甚至是对这个伟大人物的记述中的"污点"[4]。

这两种观点都有失偏颇。高斯的大地测量工作之始，到底有无明确的目标，并不是问题的关键。我们要想搞清他的内蕴几何的思想脉络，应当注意到，高斯对地图绘制中的几何方法有着持久的关注，他得到的球面到平面的映射，间接地证明了：高斯应当已经明确地球表面的三角形内角和不会等于180度。但是，这不能说明高斯当时已经动机明确地去验证非欧几何原理，因为球面几何的历史已经很长了。也就是说，高斯的内蕴几何思想受到地球表面形状的启发，但不能说他在1816年就已经明确了非欧几何的客观性。

事实上，高斯是在不断地思考过程当中，逐渐形成了他的非欧几何以及内蕴几何思想。高斯的非欧几何思想与他同时代的人有着明显的区别，高斯并不是为了建立起与欧几里得公理体系不同的、无矛盾的几何学公设，他的思想是基于他的曲面的几何学研究而产生的，而这与他的大地测量工作又有着密切的联系。高斯的非欧几何研究限制在二维曲面，高斯的兴趣是建立二维几何学的基础，目的在于得出曲

---

[1] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, in *Carl Friedrich Gauss Werke*. ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.4, Leipzig: Toubner, 1870, p217-p258.

[2] Bernhard Bavink, *Ergebnisse und probleme der naturwissenschaften*, ed. Zurich, 1949, p45, 115.
Max Jammer, *Concepts of space*, Harvard university, 1969, p147.

[3] Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford university, 1972, p872-873.

[4] Edmund Hoppe, *C.F. Gauss und der euklidische Raum*, Naturwiss, 1925, 13, p743-744.
Arthur Miller, *"The myth of Gauss" experiment on the Euclidean nature of physical space*. Isis, 1972, 63, p345-348
W.K. Buhler, *Gauss: A biographical study*, Berlin, Springer, 1981, p100.

面上的三角公式等能够表示曲面度量性质的几何量。沿着这条道路，高斯把几何学引向了新的境界：只关注几何对象本身，而不去了解这个几何对象所在的外围空间的情况，从而滤去了很多无关信息。这就是高斯的内蕴几何。

测地工作使高斯逐渐形成了与欧几里得几何不同的思想，这种思想促使高斯形成他的内蕴的集合框架。非欧几何启发高斯：空间未必一定是平直的，曲面本身就可以作为一个空间而存在，而这正是内蕴几何的核心思想。在高斯之前，非欧几何已经有了一定的发展，高斯的内蕴几何思想正是在这样的基础上形成和发展的。

2.2 通向弯曲空间之途

高斯很早就注意到了非平直空间的原理，但他害怕陷入无休止的争论（“the chatter of the Boetians” “蠢人的叫喊”），没有公开发表他的有关论文。但是在他的一些文章中，提到了他对欧几里得平行公设的观点：“在平行理论中我们不得不超越欧几里得，这是数学中有争议的部分，也是或迟或早一定会采取的非常不同的形式[1]（1813 年）。”另外高斯在 1816 年写给格林的信中指出了拉格朗日的有关欧几里得平行公设的“证明”的错误[2]，这说明“高斯已经开始接受新几何学的可能性”[3]。

事实上，高斯在 1828 年给出了一个独立于欧几里得平行公设的证明，他的结论包含三角形内角和小于 180 度的定理[4]。我们不能说此时高斯的脑海中已经形成了弯曲的坐标系的概念[5]，但是无论如何，高斯关于非平直空间的设想，为他建立基于曲面本身即为一个弯曲空间的几何学，从而在根本上改变微分几何的发展方向，创造出引导几何学向现代形式转变的新模式，做了思想上的准备。

高斯非欧几何采用的策略和途径是非常独特的。他选择了这样的方式：在曲面研究中发展欧拉提出的基本概念：参数表示。笛卡尔方法是用三个坐标之间的一个方程表示一个曲面，而欧拉的方法是用三个方程分别表示三个坐标：

$$x = f(u,v),\quad y = g(u,v),\quad z = h(u,v)$$

---

[1] C.F. Gauss, *Carl Friedrich Gauss Werke*, ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.8, Leipzig: Teubner, 1900, p166.
[2] 同上，p168.
[3] H S M. Coxeter, "Gauss as a geometer," *Historia mathematics*, 4(1977), p388.
[4] C.F. Gauss, *Carl Friedrich Gauss Werke*, ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol 8, Leipzig: Teubner, 1900, p190-p193.
[5] 曲线坐标系是 G.Lame(1795-1870)在他 1833 年关于热方程的论文中引进的。

当参数 u，v 独立取遍任一指定数集时，函数 f，g，h 就有了数值 x，y，z。[①]

用参数方程表示曲面较之笛卡尔方法的优越之处在于：第一，参数表示是内蕴的，它的坐标只参照曲面本身，而不是像笛卡尔方法那样，参照一组外在的、与曲面无关的坐标轴；第二，参数表示很容易推广到任意维数的空间，只要增加参数的数目就可以了，而笛卡尔方法在超过三维的情形是不可思议的。[②]

高斯的策略在今天看来不仅是天才的，而且具有非常实际的使用价值。他将非欧几何思想与微分几何相结合，在推动微分几何发展的同时，为发展曲线坐标系中的微分运算创造了条件，也为现代几何学开拓了基本的研究思路。那么，高斯作了些什么？他的思想来源又是什么呢？

几何学发展到高斯那里，球面几何已经有了相当厚实的基础，非欧几何的思想也获得了相当程度的认可，几何学需要进一步发展了。高斯承担了这个任务，他所采用的策略是在微分几何中实现非欧几里得空间，这不仅是明智的，而且是很先进的思想。他从曲面的参数方程开始研究曲面的内在性质，从根本上改变了几何学的面貌。最早研究曲面的内在性质的是瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707-1783）。1774年他首先引进了平面曲线的内在坐标这一概念，即以曲线弧长这一几何量作为曲线上点的坐标。欧拉当时用参数方程 $x=x(s), y=y(s), z=z(s)$ 表示空间曲线[③]，改变了一直使用的笛卡尔坐标方法。欧拉的内在坐标实质上是球面几何的参数表示，所以仍然是欧几里得空间中的几何形式，与高斯后来的直接把曲面作为空间是根本不同的[④]。

欧拉的工作为高斯的内蕴几何做好了铺垫，欧拉的方法将古典的微分几何向前推进了一步，更靠近黎曼几何了。古典的局部微分几何是研究三维欧氏空间的曲线和曲面在一点邻域内的性质，这帮助我们可以处理远比平面几何要复杂得多的几何

[①] 一般来说，设 x_1，x_2，x_3 为 E^3 的笛氏坐标，则曲面 S 的参数方程为：

$$x_i = x_i(u, v)$$

[②] E.T Bell， *Men of mathematics：the lives and achievements of the great mathematics from Zeno to Poincare*，1937, London, p320.

[③] L.Euler， *Novi community of Academy of science*， 19(1774)， p340-p370.

[④] 如果空间一点的直交坐标 x，y，z 都是两个独立变数 u，v 的函数，它的轨迹就称为曲面，用参数方程表示为：

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v) \qquad (1)$$

或用向量形式表示为：$r=r(u, v)$

如果从（1）消去 u 和 v，可以得到一个方程：$F(x, y, z)=0$　　（2）

那么满足（2）的点（x，y，z），如记 $x=u$，$y=v$，就可以从（2）解出 z，得到：

$$x=u,\quad y=v,\quad z=f(u, v) \qquad (1')$$

高斯常用参数方程（1）表示曲面，而欧拉之前包括蒙日等人常使用（1'）表示曲面。

对象。引进了微积分以后，几何学有长足的进步，我们开始知道直线或是圆以外的图形都可以用严格的数学来描述，几何学家运用微积分很好地描述几何图形的局部性态。古典微分几何学或称为高斯之前的微分几何学对光滑曲线(曲面)的研究，围绕曲线的弧长、曲线上一点的切线等概念展开，求切线的方法依赖笛卡尔坐标系，而这是在欧几里得空间中建立的坐标系。古典微分几何研究的核心内容之一是计算曲线在一点的曲率，而计算曲线或曲面上每一点的曲率使用微分的方法，即以分析方法来研究空间曲线和曲面的几何性质，从我们熟知的微积分史可以知道，这种微分方法同样是笛卡尔坐标系中的运算方法，或称为欧几里得空间中的分析方法。

很显然，尽管研究方法改变了，但是空间形式并未改变。这里的微分几何仍然是欧几里得式的，分析是欧几里得空间中的分析（或称为笛卡尔空间中的分析）。不过，这些成果为高斯提出他的内蕴几何理论准备了知识上的准备。

欧几里得空间中的微分几何的发展经历了 150 年之后，高斯抓住了微分几何中最重要的概念和带根本性的内容，建立了曲面的内蕴几何学。其主要思想是强调了曲面上只依赖于第一基本形式的一些性质，例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上的一区域的面积、测地线、测地线曲率和总曲率等等。高斯的内蕴几何理论，发展了古典微分几何的空间观念，为黎曼革命性地构架弯曲空间的几何理论开了先河。

“19 世纪，哥廷根大学的 C.F. 高斯是唯一重要的德国数学家。高斯作为灯塔式的数学家，他的工作是十九世纪的核心，尽管他是一个孤独的研究者。”[①]十九世纪，数学经历着革命性的变革，这在代数和几何两个方面同时表现出来。代数领域是凯莱、西尔维斯特和格拉兹曼引领的，其成果是开创了抽象代数学；几何领域则是以高斯为领袖，开始了曲坐标系（或称为弯曲空间）中的几何性质的研究。高斯为现代几何学提供了基本思想和方法，经过黎曼、克里斯托夫、里奇等人的发展，到了 S. 李、嘉当、陈省身那里，高斯的思想得到了更好的继承和发展。概括地说，在几何学史上，欧几里得是第一个人，高斯是第二个人，而第三个人还未出现[②]。

高斯的《关于曲面的一般研究》对微分几何的进展起了决定性的作用。他的内蕴微分几何思想，集中体现在《关于曲面的一般研究》中，其主要内容为：

---

① M. Jonye, *The Cambridge history of science. The modern physical and mathematical science*, 5(2003), p459.

② 此言虽显武断，但也有某些根据。杨振宁先生曾赋诗：“天衣岂无缝，匠心剪接成；浑然归一体，广邃妙绝伦；造化爱几何，四力纤维能；千古寸心事，欧高黎嘉陈。”把黎曼、嘉当、陈省身与高斯和欧几里得并列，很有道理。不过如果按照这样的分段方法，笛卡尔和费马也当在其列，事实上，笛卡尔和费马是对欧几里得的延续，黎曼、嘉当和陈省身是对高斯的延续。

(1)借用欧拉的曲面的参数方程 x=x(u，v)，y=y(u，v)，z=z(u，v)代替显式方程，并给出弧长元素 $ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2$ 为第一基本形式。

(2)在惠更斯(C. Huygens，1629-1695)和克莱罗(A. C. Clairaut，1713-1765)关于平面曲线曲率的概念的基础上，定义了高斯曲率，给出了曲率用曲面的偏导数表示的公式，证明了高斯曲率完全跟曲面在三维空间中的形态无关。高斯给出了全新的概念：曲面本身就是一个空间。

(3)研究了曲面上的测地线，证明了测地线构成的三角形的高斯-博内公式。

高斯在这篇经典论著中写道：

[①]有两种一般的方法来定义一个曲面.第一种方法是利用坐标 x, y, z 之间的方程，我们可以假定这一方程已经归约为形式 W=0，这里 W 是未定元 x, y, z 的一个函数. 设函数 W 的全微分为：

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz$$

在曲面上，我们有 $Pdx + Qdy + Rdz = 0$，这些方程必定对曲面上所有线元 ds 的方向都成立。因此，我们有：

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, Z = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

第二种方法是将坐标表示为两个变量 p, q 的函数形式，假设这些函数的微分给出

$$dx = adp + a'dq$$
$$dy = bdp + b'dq$$
$$dz = cdp + b'dq$$

这里的第一种方法是经典微分几何的传统方法，即欧几里得空间中的曲线、曲面性质研究；第二种方法就是参数表示的方法。高斯接下来对这两种方法作了评述，在整个论文中，高斯采用的是第二种方法，或者是这两种方法的混合使用。

在第一种方法中，……曲面将空间划分为两个区域，……然而，在任何情况下，它将决定是否同样的法则对于整个曲面上仍成立，或者是对于不同的部分是否有不同的规则。

[①] C.F. Gauss, *Carl Friedrich Gauss Werke*, ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.4, Leipzig: Teubner, 1900, p217-p258

> 如果我们按照第二种方法，我们可以想象曲面上的两族曲线。其中一族曲线是 p 为变量而 q 为常数；另一族曲线是 q 为变量而 p 为常数。……事实上，无论何时，三条线（即当 p 增加时一族从点 A 出发的曲线分支，当 q 增加时，另一族从点 A 出发的曲线分支，以及朝向外区域的法线）就像从坐标系的原点出发的各自独立的 x, y, z 轴一样（例如：如果对于前述的三条线或者对于后面所述的三条轴，我们可以设想第一条指向左，第二条指向右，第三条指向上）。

在这里，高斯对参数表示方法做出了解释：取定曲面上的两条曲线作为坐标轴，就可以建立曲面方程，得出曲面的各种性质。高斯还表述了他对活动标架法[①]的构想：以曲面的法线为第三轴，可以建立移动的坐标系，刻画曲面上每一点的性质。

依靠参数表示方法，高斯找到了他的内蕴几何的基本方法，进而建立起了内蕴几何的基本思想。接下来，高斯论述了他的“内蕴”的含义：

> 在上一节所探求的命题导致从新的观点来研究弯曲的曲面。这个观点本身在几何学方面值得仔细研究，那就是，我们考虑曲面并非体的边界，而是一个其中一维消失了的体。曲面的性质往往只与在给定瞬间所采取的形状有关，并且往往是绝对的。

高斯不是很清楚地表达了把曲面看作一个空间的思想，正如他所说：“曲面并非体的边界”，这与他的前辈是根本不同的，“（曲面）是一个其中一维消失了的体”，也就是说，曲面独立成为一个几何实体，不再是依赖外围空间来确定的几何对象。而“曲面的性质往往只与在给定瞬间所采取的形状有关”，是对由参数表示的活动标架法的隐约表达。正因为曲面本身被看作了一个空间，它所嵌入的外部空间也就失去了意义，随着这个欧几里得性的外部空间的失效，新的空间形式随之诞生了。

高斯的重要思想，把牛顿以后的微分几何带进一个新的纪元。高斯重要的贡献是发现高斯曲率只跟曲面的内蕴度量（intrinsic metric）有关。二维曲面变形时，只要内蕴度量不变，它的曲率就不变。例如圆形柱中间切一条线以后，张开来变成一个长方形。这个过程并没有改变度量，所以圆柱的曲率为零。高斯自己也认为这是

① 活动标架法是达布（J.G. Darboux，1842-1917）于 1887 年在《曲面的一般理论的讲义》中首次引进的。

一个很重要的发现，因为高斯不仅在思想上形成了新的空间形式，而且建立了新的空间形式中的代数运算，实现这种运算的成果就是曲面第一基本形式。

2. 3　弯曲空间的几何结构——曲面第一基本形式

高斯在《关于曲面的一般研究》一文中建立了曲面的内蕴几何学，其主要思想是强调了曲面上只依赖于第一基本形式的一些性质，例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上一区域的面积、测地线、测地曲率和总曲率等等，这些量都依赖于第一基本形式，并称之为曲面的内在性质。曲面 S 的几何性质完全由被称为曲面的第一基本形式这个二次微分形式所决定。[①]由于有了曲面的第一基本形式，刚刚脱胎出来的、承载着内蕴性质的“曲面”在实在的层面上被赋予了数学意义。

高斯考虑过这样的问题：假想有一个两维曲面，上面居住着有理智的两维动物。他们能确定它们的空间是弯曲的吗？仅仅借助在曲面内所作的测量，有可能确定曲率吗？高斯发现，这是可以办到的。他证明了由曲面的第一基本形式确定了曲面的

[①]第一基本形式：

在曲面的无穷小范围内，曲面上的点 r=（x，y，z）变到 r+dr=（x+dx，y+dy，z+dz），这里 $dr=r_u du+r_v dv$（$r_u=\frac{\partial r}{\partial u}$，$r_v=\frac{\partial r}{\partial v}$），于是这两点间距离的平方是：$ds^2=dr\cdot dr$，或记为

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \qquad (3)$$

其中，$E=r_u\cdot r_u$，$F=r_u\cdot r_v$，$G=r_v\cdot r_v$

等式（3）右端是 du，dv 的二次形式，称为第一基本形式。E，F，G 称为第一基本量。曲面上的两系参数曲线构成直交系统的充要条件是：F=0。

二次微分形式 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 的判别式等于：$EG-F^2$

根据定义，$EG-F^2=|r_u|^2|r_v|^2-(r_u\cdot r_v)^2=|r_u\times r_v|^2$

经过参数变换：

$$\begin{cases} u=u(\bar{u},\bar{v}), \\ v=v(\bar{u},\bar{v}), \end{cases}\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\neq 0\right)$$

$$r_{\bar{u}}\times r_{\bar{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}r_u\times r_v$$

因此，若 $\overline{E},\overline{F},\overline{G}$ 表示曲面对于新参数 $\bar{u},\bar{v}$ 的第一类基本量，则：

$$\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\right]^2(EG-F^2)$$

全曲率，即高斯曲率（高斯全曲率是欧拉主曲率的乘积）[①]。曲面的高斯曲率 K 是平面曲线的曲率 k 的类比：$K=\lim\limits_{A\to 0}\frac{A'}{A}$（A 是 V 中包含 p 点的一个区域 B 的面积，A' 是 B 经高斯映射 N：S—S^2的象的面积。）与$k=\lim\limits_{s\to 0}\frac{\sigma}{s}$（s 是 C 上包含 p 点一小段弧长，σ 是它在切线标线中的像的弧长。）

有了这些认识之后，高斯着手研究曲面的固有性质，为此，高斯引进曲面 r=r(u, v) 的第一基本形式：

$$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)$$

其中：

$$E(u,v)=x_u^2+y_u^2+z_u^2$$

$$F(u,v)=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$$

$$G(u,v)=x_v^2+y_v^2+z_v^2$$

E，F，G 称为第一类基本量，在曲面上每一点都是常数。

进行了这些准备工作后，高斯证明了曲面的全曲率公式 K，并且证明高斯曲率就是欧拉在 18 世纪提出的两个主曲率 k_1，k_2的乘积，即$k=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$。全曲率是参数选择和运动的不变量。这样一来，高斯就把曲率、长度、角度这些最基本的性质用第一基本形式确定下来了。

第一基本形式是曲面 S 如何继承 R^3 的自然内积的表达式。在三维欧氏空间 E^3 中，与曲线相比，曲面有着重要得多的性质。第一基本形式是处理曲面 S 上的度量问题（曲线的长度、切向量的夹角、区域的面积等）的一个自然的工具，一旦知道了曲面的第一基本形式，就可以不离开曲面来进行这些计算，而不必回到曲面的外围空间 R^3。这样就可以抛弃以往的观念：曲面是位于一个三维空间中，这样就意味着，如果把曲面本身看作是一个空间的话，曲面就是非欧空间；而且，由于一张曲面由 E，F，G 确定，于是曲面就有 E，F，G 所确定的几何，这个几何对于曲面是内蕴的，而与周围的空间毫无关系。也因为这个原因，这些概念称为曲面的内蕴量。

---

① 曲线的重要几何不变量——曲率，刻画了曲线的性质。曲率刻画了曲线的方向向量转动的快慢，从而标志了曲线的弯曲程度。在存在外部曲率的空间中法向矢量不平行，外蕴形状给出欧拉主曲率；测地线描绘了内蕴曲率，内蕴度量给出高斯全曲率。全曲率与曲面形状有关，$K>0$ 时曲面全凸，$K<0$ 时曲面类似于马鞍面，$K=0$ 时的典型例子是圆柱的侧面，如果 K 处处为负常数，该曲面称为“拟球”。

除此之外，曲面的许多重要的局部性质（曲率和挠率等）只用第一基本形式就可表达出来，对这种性质的研究正是把高斯的几何学称为曲面的内蕴几何的原因。

高斯之前的几何学家（比如欧拉），在研究曲面时总是把曲面与外围空间相联系，找出曲面上一点的主方向，再计算两曲率线的法曲率的乘积。高斯证明了由曲面的第一基本形式就确定了曲面的总曲率，即高斯方程，这是高斯的著名发现，被称为"极妙定理"。他说："如果一个弯曲的曲面可展开到任何另外的曲面上去，则每点的曲率是保持不变的。"[①]高斯建立的内蕴几何学有着深远的影响，是在微分几何上的一个关键而重要的突破。

这样，我们就可以轻而易举地在欧氏几何曲面上实现非欧几何了。如果把球面看成三维空间中的一张曲面，球面的几何就是欧氏的；但如果把球面本身当作一个空间来研究，取纬度和经度作为点的坐标，大圆弧就是"直线"，这样的几何就是一种非欧几何。这样得到的空间是一个二维的正的常曲率空间，依据这种非欧几里得空间模型构造更高维的类似空间的例子是黎曼在 1854 年给出的。

[①] C.F. Gauss. *Carl Friedrich Gauss Werke*. ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.4, Leipzig: Teubner, 1900, p217-p258

第二节　高维空间观念的建立：黎曼"流形"的渊源之二

高维空间最早由凯莱和格拉斯曼开始研究。1843年，凯莱发表《n维解析几何》，首次系统研究高维空间。凯莱的这篇论文只在标题与几何有关，全文是关于线性方程组的内容。凯莱之所以以此为标题，是因为凯莱一贯以代数方法研究几何问题，这是凯莱的一大特点。1844年，格拉斯曼发表《线性扩张论》，明确提出"n维线性空间"概念，高维空间得以建立。

1　格拉斯曼的n维向量空间

格拉斯曼(Grassmann，Hermann Günther，1809—1877，德国）的数学成就远远走在他那个时代的前面。他是一位自学成才的数学家，1832年就开始了一种新的几何演算法的研究。他意识到自己工作的深远意义，1843年秋，他完成了名著《线性扩张论》[①]，于1844年发表。这本书奠基了线性代数、高维空间的几何学等领域，但是因为其内容实在比当时的数学水平深得多，而且叙述抽象，不被当时所接受。于是他把《线性扩张论》修改加工，更名《扩张论》(Die Ausaenuangslehre)，于1862年在柏林出版。但此书由于没有用具体明确的例子说明他的新概念，仍然晦涩难懂，仍然没有受到重视。

格拉斯曼的主要贡献是他对多维空间的研究。格拉斯曼首次提出了多维欧几里得空间的系统理论，1844年他在《线性扩张论》中引入欧几里得n维空间概念，研究了点、直线、平面和两点间的距离，并推广到n维空间，研究了抽象几何空间中的n阶曲线，发展了莱布尼兹把代表几何实体的符号按一定规则来处理的代数思想。在《线性扩张论》中，格拉斯曼在n维空间中引进坐标、向量及复数等概念，大胆地开拓了数学的新领域。

"向量空间"概念在以前数学家的论著中是不够明确的，格拉斯曼第一个清楚地解释了"n维向量空间"的概念，他把n维向量空间的向量和与积用纯几何方法来定义，发展了通用的向量演算法。

---

① H.Grassmann, *Lineale Ausdehnungslehre*, 1844, Leipzig.

格拉斯曼引入了超复数的两类法(内积和外积)，从而建立了一种有 n 个分量的非交换代数几何学。格拉斯曼、哈密顿、凯莱等数学家是近世代数的先驱，他们推出了非交换代数系统，具有深远的意义。就象罗巴切夫斯基的发现导致几何的解放一样，格拉斯曼的工作导致了代数的解放，打开了现代抽象代数的大门。

格拉斯曼在 1844 年的著作《线性扩张论》中讨论了 n 维几何，独立得到一般的具有 n 个分量的超空间理论。在这部著作中，格拉斯曼最重要的成果是定义了 n 维向量空间，以及这个空间中向量的外积；研究了抽象几何空间中的 n 阶曲线。格拉斯曼将坐标、向量及超复数等概念置于 n 维空间中，超越了向量的局限性，开拓了数学的新领域。

格拉斯曼把他的基本概念称为“扩张的量（extensive Grosse）”，这是一种有 n 个分量的超复数，格拉斯曼的思想引导数学家进入张量理论。[①]但是还不能说格拉斯曼的“扩张的量”就是“张量”， 因为张量虽然也是一个具有几何变换不变性的概念， 但它是向量概念的推广， 是多指标的向量； 而扩张的量只是具有复数的性质，它的本质仍属于“向量”范畴。

格拉斯曼定义超复数的内积为：

$$\alpha|\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

超复数的外积则定义为：

$$P=[\alpha\beta]=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)[e_2e_3]+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)[e_3e_1]+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[e_1e_2],$$

格拉斯曼认为如果两个积 ab 和 cd 相等，则它们位于平行平面之中，张成的面积相同；至于三个向量的积，则可构成一个有向平行六面体。[②]

[①] 作者在《数学的实践与认识》上发表文章指出：对于“张量”一词，通常有两个错误的猜测：第一，认为 tensor 来源于 tension；第二，认为“tensor”由爱因斯坦命名。 事实上，tensor 源自 H. Grassmann 的名著 *Extension theory* 的书名，代表一种扩张的理论，而与力学无关。“张量”就是“向量”在元素扩张之后形成的。也就是说，“张量”中的“张”表示“扩张”，并非“张力”。另一方面，这个词是由 M. Grossmann 引进的，而不是爱因斯坦。理由如下：

1. Grossmann 在 1913 年论文的“数学部分”（由他执笔），同时使用“协变张量”和“协变扩张”两种术语，虽然“协变扩张”实际上是指“协变导数”，但从定义概念的方式看，有着内在的关联性。

2. Grossmann 在同篇论文中还把张量称为 “广义矢量”，这与 Grassmann 在 *Extension theory* 中提出的“广义 n 维向量”存在数学意义上的关联。

3. Grossmann 在论文数学部分的首段阐述了“广义矢量分析”（即张量分析）的历史，而 Einstein 在同篇论文物理学部分第一次提到“二秩协变张量”这个术语的时候，与前文的论述没有直接的关联。而且，Einstein 本人对这个术语加了注：“参看本文数学部分”，即 Grossmann 执笔的那一部分。

[②] Grassmann, *Theorie der ebbe und flut*, in *Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische werke*, vol.3, p6, Leipzig, 1894-1911

这样，格拉斯曼就定义了两向量的几何积：“由这些向量决定的平行四边形的面积”，以及三个向量的几何积：“由它们所形成的平行六面体”[①]此后，格拉斯曼将赋予内积和外积的向量空间推广到了 n 维的情形，建立了他超越前人的抽象理论。格拉斯曼最具原创性的工作是引进了“扩张量”，这是一个没有清晰定义的量，只用一个方程来表示：

$$a = \beta b + \gamma c + \delta d + \cdots$$

其中，希腊字母代表数字，拉丁字母是“扩张量”的符号。格拉斯曼给出了高维内积的例子：

设： $a = \sum \alpha_i e_i, b = \sum \beta_i e_i, c = \sum \gamma_i e_i, d = \sum \delta_i e_i$

则： $abcd = \sum \alpha_i \beta_j \gamma_k \delta_l [e_i e_j e_k e_l]$

这在形式上已经突破了向量的范畴，具有张量的思想特征了。当然这不是张量，因为张量是二阶的量，与向量有根本的不同。

格拉斯曼的思想独具的特征是他以符号化的方式来表达几何概念。格拉斯曼的高维空间观念，是他的向量分析的自然推广。对于格拉斯曼来说，他的“扩张”的理念包含这样几层含义：第一，运算不再局限于数字，还应该包括几何量（线段、平面）；第二，运算的空间应当突破三维，而达到 n 维的情形；第三，线段除了长度之外，还应该有方向。需要指出的是，格拉斯曼的数学属于向量分析的范畴，没有达到张量分析的高度，他所谓“extension(扩张量)”也不是后来的“张量（tensor)”。“1844 年，格拉斯曼在《扩张论》中首次建立起‘多维空间概念’，为黎曼的工作做好了准备。n 维空间成为 1870 年代数学家共同的主题。”[②]

2　凯莱的 n 维解析几何

与格拉斯曼完全独立，凯莱(Cayley, Arthur，1821－1895，英国)用分析方法研究了 n 维几何。凯莱在数学上最早、最重要的工作之一，是创立不变量理论。凯莱在 1843 年开始计算 n 次型的不变量，即在变换下 n 次型具有哪些不变量，以得到哪些量经变换后只相差某个因子。1845 年，凯莱发表《线性变换理论》(On the theory of linear transformation)，1846 年，凯莱发表《论线性变换》(On linear transformation)

[①] N. Kolmogorov, *Mathematics of the 19th century*, 1996, Birkhauser, p77-78.
[②] R Tobies, *The reception of H Grassmann's mathematical achivements*, in *Hermann Gunther Grassmann(1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, G Schubring, Kluwer academic publishers, London, 1996, p119.

一文，引入了“协变量”(covariance)的概念，这两篇论文奠基了 n 维向量代数的基础。凯莱是第一位表述在一般意义下的代数不变量问题的数学家，他第一个深入研究求不变量的一般方法，得到了一系列重要结果。

凯莱将矩阵论与超复数等线性结合代数联系起来考虑。四元数是凯莱关注的一个重要方面，因为四元数提供了一个不具有乘法交换性的代数，这使得他在考虑矩阵乘法时有了先例。但是，凯莱的矩阵概念不是直接来源于四元数理论，而是在他对不变量理论和线性变换理论的研究中逐步产生的。

在这些知识和思想背景之上，凯莱研究了高维空间中的几何学。凯莱被认为是 n 维几何、高维抽象空间的创始人之一。他通过将 n×m 矩阵方面的工作类比于几何中的概念，从而实现了高维空间的解释。另一方面，他在几何研究中也应用了高维空间的思想，

1843 年，凯莱在考虑行列式的性质时，提出行列式各行形成 n 维空间的坐标。同年，他写成了《n 维解析几何》[①]，这篇文章虽然标题是“n 维解析几何”，但主要内容却是关于任意多个变量的齐次线性方程组的非零解的问题，凯莱正是通过他已经建立起来的协变量理论，用代数方法引入 n 维空间的。作为特例，凯莱举出了四维情况下，平面与二次曲面的交线的特征。

在这篇文章中，凯莱给出了关于 n 个变量的齐次方程的分析结果，表明他已经建立起 n 维几何空间的概念。凯莱的结论是：如果 n 个变量有 r 个独立方程，那么在对易系统中将有 n—r 个。它的几何意义是：在 n 维空间中，r 个独立方程决定这个空间中的（n—r—1）维平面。这是最早的关于高维空间的认识，它的意义不在于定理本身，而是蕴含在它所揭示出的高维空间的客观性质中的现实可能性。在另一篇论文《关于四元数和雅克比的椭圆函数》[②]中，凯莱讨论了八维空间中的向量，实质上，这里已经不能称之为向量了，尽管它同样不能称为张量，凯莱已经发展了向量概念，朝着张量而去了。凯莱所做的工作极大地启发了后人去发展更加强有力的数学计算方法，为 20 世纪初几何与代数在更加抽象的层面上融合，创造了条件。

[①] A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127.

[②] A.Cayley, *On Jacobi's elliptic functions and on quaternions*, in *Philosophical Magazine*, vol.xxvi. (1845), p208,211.

凯莱在《n维空间中的解析几何》[①]一文中用n变量的齐次方程组表达n维空间中的几何对象[②]，凯莱得出n维空间中r次曲面的性质。这篇文章中，凯莱把行列式和矩阵引进了向量空间的研究中。凯莱的前提是：

对于方程组：

$$A' = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n,$$
$$B' = B_1x_1 + B_2x_2 + \cdots + B_nx_n,$$
$$\vdots$$

都是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的线性函数。

接着，凯莱找到了决定n维空间中二次齐次函数的表达式：

$$U = \frac{1}{2}\left[\sum(\alpha^2)x_\alpha^2 + 2\sum(\alpha\beta)x_\alpha x_\beta\right]$$

在对这个二次齐式的系数进行计算之后，凯莱得到：

I 如果一个二次曲面与一个圆锥相交，则可以决定三个过相交曲线的圆锥；

II 如果一个二次曲面与两个平面相交，则可以决定两个这样的圆锥。

从这里开始，凯莱将一个维数为 n 的向量空间视为n维空间，在二维和三维空间中大多数有用的结论可以扩展到这些高维空间。尽管n维空间中的向量不容易想象，但这样的向量（即n元数组）用来表示数值非常有效。由于作为n元组，向量是n个元素的“有序”列表，因此可以在这种框架中有效地概括和掌握数值的结构。凯莱的n维向量空间尽管是线性的，距离黎曼的n维弯曲空间观念还有距离，但作为研究高维空间的代数方法，有着非常深远的意义。

这样，凯莱在分析学中讨论了具有n个坐标的变量；而格拉斯曼则是从向量的角度建立高维空间理论，他们用不同的方法导出超越直观的n维空间概念。从时间关系看，黎曼的关于n维弯曲空间的演说是在1854年，比凯莱和格拉斯曼发展出n维线性空间概念要晚十年，而且，黎曼与凯莱和格拉斯曼都是通过引入解析结构来研究n维几何。因此，黎曼度量空间的提出与n维线性空间的建立有着很密切的渊源关系。

[①] A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127.
[②] 文章中没有出现“向量（vector）”这个词。

第三节　黎曼构造“流形”概念：张量表示空间形成

黎曼预见到了现实世界的更重要的特征。黎曼的分析技术包括度量和曲率张量，他在几何领域创造了富有意义的变革，并且改变了几何问题的前景。黎曼的观点主导了微分几何，直到嘉当学派引进活动标架法。

——　Portnoy

乔治　弗雷德里希　波恩哈德　黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826 - 1866）从高斯的第一基本形式抽象出一般的度量形式，构想了一种新的空间。1854年，黎曼在格丁根大学作了就职演说，题为《关于几何基础的假设》[①]，推广了空间的意义[②]。黎曼的演讲全文分三大部分，第一部分是 n 维流形的观念，第二部分是 n

---

[①] B.Riemann, *Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen*, (1854), in *Werke*, Springer, 1892, p272-287, transl. by W.K.Clifford, *Nature*, vol. 8, Nos. 183,184, p14 -17, 36, 37

[②] 空间作为一个独立的概念，自伽利略和牛顿以降才逐步得以明确：空间可以是一种均匀的、在任何位置和任何方向上都是等价的，又是感官所不能觉知的欧几里德空间，也可以是一种能够被体验的，与人及其感觉作用联系在一起的知觉空间；它可以是一种负向的塑性造型，数理技术所筹谋的实体空间。诸多空间的概念是人类发明的产物，它们各自有自己的功用、周期及历史。追根溯源的工作可以从公理性的定律开始。空间首先是有意识人类的一个基本的存在经验，我们可以将之视为柏拉图的空间：“所有制造的、可视的事物之母和容器，接纳所有实体的宇宙本质……” 在柏拉图之前，人类的经验并不具有明确的空间概念，而只有神秘的神话世界，在神话思想中，空间从来被看作是纯粹的或空洞的形式，而是被看作统治万物的巨大而神秘的力量。

某种东西在其中坐着的东西，也就是我们所称为的“空间”，只有在其中，事物才能够存在，才能显现出来。希腊人没有具体的词来指称“空间”，因为希腊人不是从 extensio（广延）方面来体会空间性的事物，而是从广泛的自然环境或外部环境（topos）中限定出 chora 来进行体会的。chora 既不指所处的位置，也不指空间实体，而是通过立于此者被接收、被占领的。chora 属于事物本身，各种的事物各有各的 chora。实体就被推到此处所的“空间”中去，又从其中提出来。

因此，经由柏拉图，希腊人对于宇宙的理解是三位一体的，每件事物都是由潜在事物，现实事物，以及连接它们的运动所组成的统一体，这三者中的任何一个都不能离开其他两者而存在。Chora 是终极的不可解构的，它为所有去存在的事物（to being）提供了位置，希腊人以神秘的方式来看它，认为任何事物的存在必须在某个地方，并且有一定空间，从而构成了我们所知的世界。

自从伽利略对于空间问题的探索开始，一种与以往空间观念不同的物理学诞生了。在其中，空间如同实体一样可以物质化，无论是运动或静止，都成为不影响物体存在的一种状态。伽利略将柏拉图的空间（chora）从神化天上带到了人间地下，通过科学化的宇宙观，伽利略构成了一种“空间/物质本质一体化”的认识，空间是一种负型的物质，它不再只是想像性的，而是可用的、可操纵的。它消解了神秘事件，将存在简化为纯粹的实体，也就是再现的物体世界。只有通过空间的物质性操作和控制，才有可能证实伽利略物理学的真理性，将它们假定是在一种可以想像的、在空中的运动。这样，伽利略为 chora 制造了一种状况来分解成为科学（几何）空间和无生命（数字化）的物质，并使一种总体上作为工具性的和技术性的文化成为可能。

笛卡尔则进一步以“普遍空间”和几何方式使空间得以感受，他认为空间与物质是互为本质的，并使得空间概念空间“轻薄化”和实体化。空间被赋予了一种数学理性的透明，它是数学理性的一种表达，而不是使存在具体化的媒介。在17世纪下半叶，牛顿在笛卡尔的空间里形成了物理学的重力原理，以此所构成的数理模型是同质的、标准的和无限的。于是心理学也同样将这种空间接受为感觉的基本状况，它脱离了原始状态，既非有灵，又无生命，它不能爆炸或压缩，也不能流动，它只是处于静止状态，而没有任何神秘感。

牛顿的虚空是一种普遍的宇宙空间，它是不可见的，也是前提性存在的。在其中，人类的知识只能成为一种被动的接受者，在空间的真理前，人人都是平等的。其结果也导致了将一种无限轻薄，无可掌握的深度置于一种精准的现在，也就是一种透视深度，它在世俗化之后就显得最终平淡无奇了，如同世界的真理可以通过照片图像之类的文件来进行传递。

和谐整体宇宙的解体和空间的几何化，也就意味着将一个有限、有序的整体（其中空间结构体现着完美与价

维流形的度量关系，第三部分是对流形的应用。他继承了高斯将曲面本身看作一个独立的几何实体，而不把它仅仅看作欧几里得空间中的几何对象的思想，构造出“流形”的概念，这是一个一般高维弯曲空间。

1　黎曼构造“流形”的思路

第一节中我们论述了高斯的观点：在三维空间，曲面可以只用两个独立变量表示。将曲面作为二维空间考虑，它的性质已经不再有欧几里得几何的特点。例如在球面上，点的位置可以有经度和纬度确定；球面上没有直线，球面的几何性质与平面上的几何性质根本不同。高斯曾证明，曲面上的几何关系可以通过曲面上的丈量工作获得；曲面上的几何关系可以在曲面上独立陈述，既不必籍助于三维空间，也不依赖曲面上坐标的选择。高斯提出了一个全新的概念：一张曲面本身就是一个空间，这个概念随后为黎曼所推广。并且由此确立了罗巴切夫斯基几何的“合法”地位，从而在非欧几何中开辟了新的发展道路。事实上，张量数学的精髓恰恰在于对弯曲非欧几里得空间中的曲线进行微分运算。

在高斯之后，黎曼发展了高斯的内蕴几何思想。黎曼提出了一般空间（即非平直的弯曲空间）的度量形式。这是以高斯的内蕴几何为基础的一种新的几何学思想，这个设想后来经过贝尔特拉米、克里斯托弗、里奇等人的努力，建立起弯曲空间中的微分运算（即张量分析方法），发展出黎曼几何学。黎曼将曲面本身看成一个独立的几何实体，而不再把它看作欧几里得空间背景中的几何对象。他发展了空间的概念，提出现代 n 维微分流形的原始形式。“流形”概念为用抽象空间描述自然现象奠定了基础，而这一切都是张量概念产生的内在动力。

黎曼提出的空间（或流形）度量形式是一种局域性的几何结构，它所依据的是微分几何立足于很小的邻域内的研究方法，通过局部性质的研究，来了解复杂结构的几何性质。在黎曼的思想中，空间与流形是相同意义的结构，因此，了解了几何对象的性质，也就了解了空间的性质。黎曼几何是笛卡儿坐标几何的自然推广，在笛卡儿坐标系中 m 维空间中的一个点可以用 m 个数来表示坐标，根据勾股定理可以定义此点到原点的距离，也是由于勾股定理的原因，这个点到原点距离的平方是

值等级的世界概念），代之以一个不确定的，或者无限的宇宙概念，这个宇宙不再按照天然的从属关系进行连结，而仅仅由其基本部分和定律的同一性进行连结。其结果，亚里士多德的空间概念（世界内部被分化了的一系列处所），被欧几里德几何的空间概念（一个本质上无限且均匀的广延，如今它被等同于世界的实际空间）所取代。

——（董明：“空间神话”）

坐标的一个二次形式。而在黎曼几何中，空间是弯曲的，这就需要用坐标的微分，来把弯曲空间局部化为笛卡儿空间，因此黎曼几何又是一个局部化的几何，而实现这个想法就要用到微分法。黎曼几何主要建构在弧长 s 上，弧长微分的平方会等于坐标的一个二次微分式，即 $ds^2=\Sigma g_{ij}x_ix_j$；用弧长即可建立一个几何，因为既然有了 ds，便可计算两点所连接的曲线的长度，也就是弧长。进而可以确定测地线方程，测地线是指在两点间使弧长最短的那条曲线，它是平面上直线的推广。有了测地线，便可以确定面积及其它各种几何量。

黎曼根据高斯的发现，指出我们可以推导一个全部内蕴的、反映空间本质的几何学（intrinsic geometry）。我们只要知道两点之间的距离怎么度量，就可以引进曲率的观念。前面我们已经论述了高斯的曲面第一基本形式可以唯一地决定曲面的度量性质，计算出曲面的各种数据。黎曼正是沿袭了高斯的思想。

黎曼给出了依赖于流形的性质而不依赖于所采用的特殊坐标系的程序，这就把向量的性质从高斯的二维情形移植到了 n 维流形，黎曼开创的高维抽象几何的研究是几何史上一场深刻的革命，他设想的后来以其名字命名的几何体系，对现代数学和物理科学的发展产生了深远的影响。黎曼创做基于流形上的几何理论，是希望将高斯公式推导到高维空间去。黎曼认识到度量只是加到流形上的一种结构，并且在同一流形上可以有许多不同的度量。高斯仅知道欧几里得空间中的曲面上存在诱导度量 $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，即第一基本形式，而并未认识到曲面还可以有独立于三维欧几里得几何赋予的度量结构。

在黎曼几何的情形之下，不需要整个的空间，我们只需要空间的一部分，因为 ds^2 有意义，我们便可量弧长、面积、角度等几何性质，不需要知道全部的空间。也就是说，在这样的一个小块里，便可发展全部的几何性质，这是黎曼几何革命性的观念，使几何局部化。黎曼实际上提出了一种以高斯二维弯曲空间为低维类比物的抽象空间，这是张量得以表征的空间。

2　黎曼“流形”的内涵

黎曼引进 n 维流形的概念，把高斯关于欧氏空间中曲面的内蕴几何推广为任意空间的内蕴几何。流形不依赖于外围空间，它本身是可以弯曲的，因此每一点在该

空间中的局部不一定相同。为了刻画局部度量，黎曼依据高斯的思想[①]，提出了一般空间的度量形式：

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^i dx^j.$$

其中 $\{g_{ij}\}$ 是由函数构成的正定对称二次型，现在称为黎曼度量。赋予这种度量的流形或空间，就是黎曼流形或黎曼空间。流形的度量给定之后，曲面的曲率就完全确定了。当常曲率流形曲率为0时，便得出平坦流形，即与欧氏空间局部等价。

由于第一基本形式具有决定空间性质的能力，所以黎曼的度量形式同样应该具有这种能力，但黎曼本人没有发展出基于他的度量形式的空间所具有的细部结构，没有得到新空间中的几何学方法。黎曼的微分几何学新思想包括流形、黎曼度量、黎曼曲率等重要概念。简单的说，就是用局部坐标和坐标变换来描述一个空间，用黎曼度量做最基本的几何量，空间的几何性质如弯曲程度由度量形式来决定。黎曼几何主要建构在弧长 s 上，弧长微分的平方会等于坐标的一个二次微分形式，即 $ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$；用弧长即可建立一个几何，因为既然有了 ds，便可计算两点所连接的曲线的长度，也就是弧长。[②]

黎曼设想的几何学是一种非欧几何，但是这种几何学既不是萨凯里和兰伯特的概念性的非欧几何，也不是罗巴切夫斯基和波尔约的逻辑性的非欧几何，而是一种依赖度量概念的非欧几何。黎曼抽取了几何学中唯一的要素：两点间距离，以此为基础，提出了推广了的几何空间：流形。在 n 维情形，一个流形就是一个有序的 n 元数组（$x^1, x^2, \cdots, x^n$）。黎曼实际上将"空间"概念严密化了，在黎曼的观念中，"空间"是指一个独立的实体，它是物理上的物体的位置，或者物理运动的地点。数学不再关心空间是什么，以及是什么样的空间，数学只关心定义了坐标的空间。所以在现代意义上，空间就是一类流形，现代数学的空间概念是从黎曼开始的。

由于度量形式相当于欧几里得几何学中的勾股定理，或者是解析几何中的距离公式，当然最直接的比喻是高斯微分几何中的第一基本形式，因此度量形式是黎曼几何学的起始点。事实上，黎曼几何学赖以存在的基础及工具——张量分析，就是

[①] 邓明立在《黎曼的几何思想萌芽》一文中指出，高斯的工作不仅开辟了内蕴微分几何的研究领域，还直接为黎曼的工作创造了条件。黎曼肯定熟知并参考了高斯的工作。他在 1854 年的演说中研究流形的度量关系时提到："在建立了 n 元流形的观念，并将其中位置决定问题转化成为数值决定问题的基本性质确立之后，我们接着要讨论第二个问题—研究能适用于流形的度量关系，及决定这些关系的条件。……这两个问题的基础见于枢密顾问高斯关于曲面的著名论文中。"毫无疑问，这篇论文就是指《关于曲面的一般研究》。经过一些假设，如用直角坐标，黎曼定义线元为一个二次微分形式。可以清楚地看到这个微分形式中高斯所定义的痕迹。

[②] D.Flament, *1830-1930: A century of geometry*, Springer, 1992, p22-34.

在对度量形式的研究过程中形成和发展的。在 1854 年黎曼提出一般空间度量形式之后，数学家围绕这样的问题进行研究：微分形式（度量形式就是一个二次微分形式）的变换问题，也就是寻求微分形式的不变量，或者说是回答微分形式的等价性问题：在两个不同坐标系中，给定两个二次微分形式，求存在坐标变换，将一个微分形式变换到另一个的条件。

这个问题首先由贝尔特拉米（E.Beltrami,1835-1900）提出并进行了研究，然后由克里斯托弗（E.B.Christoffel, 1829-1900）基本解决，提出了以他的名字命名的两类克里斯托弗记号及协变微分的概念。在此基础上,1887～1896 年间里奇（C.G.Ricci, 1853-1925）发展了张量演算方法（当时里奇称之为绝对微分法），这在广义相对论中起了构造空间形式的作用。里奇和他的学生列维-契维塔（T. Levi-Civita,1873-1941）在研究报告《绝对微分法及其应用》(1901)中对里奇的张量算法作了详细的综述[①]。

黎曼在抽象空间中引入黎曼度量$\sum g_{ij}dx^i dy^j$，导致了几何学的革命，克利斯托弗、契维塔、里奇发展了这类抽象空间上的微积分。黎曼的高维弯曲的抽象空间观念使数学及物理学发生空前的变革。但是这种先进的思想一直到半个多世纪之后才逐渐变得明显起来。黎曼度量是他在授课资格的演讲中提出的，此后，他在另一篇所谓“巴黎之作”（1861）的论文中计算了流形的曲率，也就是被后人称为曲率张量的计算公式[②]。黎曼计算了给定度量$\sum g_{ij}dx_i dx_j$的空间中曲率的计算方法。为此黎曼引进了一类特殊的量P_{ijk}，也就是类似于后来的克里斯托弗符号的表达方式。

在这篇论文的第二部分，黎曼研究了下列问题：在什么条件下，$\sum g_{ij}dx_i dx_j$可以变成已知形式$\sum a_{ij}dx_i dx_j$？其中 a_{ij} 是给定常数系数。他引进了 P_{ijk} 以及(ij，kl)，相当于后来所谓克里斯托费记号及黎曼曲率张量的分量。他给出一个二次微分变成另一个的必要条件，并用(ij，kl)来表示。他还给出 ds^2 可变成常系数的条件。他的工作很快由继承人所发展，在数学物理学上起着基础作用。

黎曼的深刻的思想打开了曲线微分运算的大门，他的思想脉络大致是这样的：

1、提出一般空间的度量形式：$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j$

2、提出“流形”概念：

一个简单流形的本质特征是从其上任何一点出发的连续运动只有两个可

[①] G. Ricci, *Méthodes de calcul différentielabsolus et leurs applications*, Mathematische Annalen,54 (1901),p128－201.

[②] 黎曼提出二次形式$\sum g_{ij}dx_i dx_j$之后，在 1861 年提交给法国科学院的论文 *Commentatio mathematica,qua respondere tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae* 中，采用线性变换不变量的方法，对这个二次形式进行了研究，实际上，Riemann 已经开始探索张量表达。

能的方向，向前或者向后。我们想象一个简单流形的每个点变换到另一个流形确定的点，如此得到的所有规定方式构成一个广义二维流形。相似地，我们想象一个二维流形通过一种确定的方式运动到另一个完全不同的二维流形时，我们得到一个三维流形，而且如何把这样的过程进行下去是非常明了的。[①]（以上思想总结在 1854 年论文中。）

3、对流形的度量形式进行微分运算，以得到给定空间的曲率。（这一思想在 1861 年论文中得到了贯彻。）

黎曼的 1861 年论文是对 1854 年论文的深化，他所使用的技术是凯莱引进的线性变换不变量方法。他所考虑的问题是：在什么条件下，可以通过方程组

$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots y_n), i = 1, 2, \cdots n$

把 $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$ 变换成 $ds'^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dy_i dy_j$

为了解决这个问题，黎曼在这篇论文中引进了一个符号 $P_{\mu, \iota, \iota'}$，这个符号也就是后来所谓的克里斯托弗符号。我们来看黎曼的思路[②]：

设有 n 维流形的线素：

$$ds^2 = \sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$$

对 $r = \int \sqrt{\sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} ds_\iota ds_{\iota'}}$ 微分，得：

$$d \sum_{\iota} b_{\iota, \mu} \frac{ds_\iota}{dr} = \frac{1}{2} dr \sum_{\iota, \iota'} \frac{\partial b_{\iota, \iota'}}{\partial s_\mu} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr}$$

从而有：

$$d \sum_{\iota} a_{\mu, \iota} c_\iota = \frac{1}{2} dr \sum_{\iota, \iota'} \frac{\partial a_{\iota, \iota'}}{\partial x_\mu} c_\iota c_{\iota'}$$

因此：$\sum_{\iota, \iota'} p_{\mu, \iota, \iota'} x_\iota x_{\iota'} = 0$

最终得到：

$$p_{\mu, \iota, \iota'} = \frac{\partial a_{\iota, \mu}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial a_{\iota', \mu}}{\partial x_\iota} - \frac{\partial a_{\iota, \iota'}}{\partial x_\mu}$$

---

① G.F.B.Riemann, *Uber die hypothesen,welche der geometrie zu grunde liegen*(1854) Bernhard Riemann,Gesammelte mathematische werke,collected papers, p272—287.

② G.F.B.Riemann, *Commentatio mathematica,qua respondere tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae* (1861) Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische werke,collected papers*, p423－455.

这与 Christoffel 符号：

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\lambda}}\right)$$

本质上是一样的。

黎曼开创的几何学的新思想在很大程度上影响了数学的面貌。“（Riemann）的分析技术包括度量和曲率张量，他在几何领域创造了富有意义的变革，并且改变了几何问题的前景。Riemann 的观点主导了微分几何，直到 Cardan 学派引进活动标架法。”[①]

黎曼虽然没有得出曲线微分的方法，也就是后来被用来构架他所设想的几何学的方法，但他在这个方面仍然做出了许多成绩，改进、引进了许多新的记号。

黎曼空间一样有曲率的概念，只是因为黎曼空间是高维的，所以它的曲率概念就变得相当复杂。这种空间的非欧性质提出了新的问题：传统的微分几何方法是在笛卡尔空间中进行的微分运算，坐标轴都是直线。而黎曼空间要求曲线坐标系，从而引起了微分运算的困难，因为直线坐标系中函数的偏微分是易于表达的，而曲线坐标系的基向量也要同时被微分，这是一个困难。要想解决这个问题，必须要有张量这个运算工具，当然，此时已经不是向量数学了，黎曼暂时还不知道这种新的数学形式该是什么样子，他只知道由度量形式可以计算流形的曲率和测地线方程，但是计算方法还有待后人的努力。

[①] E. Portnoy ,*Riemann's contribution to differential geometry*,　Historia mathematica,　9 (1982),　p1－18

第二章　不变量理论：张量概念形成的代数学进路

延续我目前课题的研究，我已经得出了新的考虑问题的方法，同时也是更一般的方法。这种方法对任意阶的两变量函数的处理有很大的优势。事实上我们可以解决这样的问题："发现一种方法：对任意多函数的所有导数，使这些导数具有这样的性质：在变量的任意线性变换之后保持它们的形式不变。

—— 凯莱

张量概念起源于代数形式不变量理论和 n 维弯曲空间思想。从现在的眼光看，张量概念是为了适应这样的要求而发展出来的：由于坐标选择带有任意性，可能使问题复杂化。人们希望反映几何学和物理学本质特征的不变量，不会因为坐标系的选择而产生形式上的变化，于是便产生了张量概念。用张量来描述的物理定律和几何定理所得到的结果，在任何坐标系下都具有不变的形式。不变量对于几何学和自然科学来说是非常重要的，一方面不变量反映的是结构所具有的固有性质，比如曲面的曲率这个不变量就是曲面最重要的性质，再比如二次代数形式的判别式这个不变量是了解一个确定的二次型的重要特征；另一方面，不变量是构造等式的必要手段，也就是建立方程和方程组的关键，这无论在解析几何探寻曲线轨迹、微分几何寻求曲线和曲面的方程，还是在建立物理学定律方面，都是核心内容。

十九世纪末，张量概念在两个方向上发展着：一个是以麦克斯韦电磁学理论为成功标志的向量分析，另一个是高斯开辟的内蕴微分几何学。前一条线索围绕着电磁场方程的不变性问题展开[①]，最终在仿射坐标系内实现了张量概念[②]；后一条线索围绕着曲线坐标系的微分问题[③]，产生了绝对微分法（后来称之为张量分析）。

张量最简单的例子是 n 阶方阵：

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

这是一个 n 维二阶张量。很明显，三维二阶张量有九个分量，而三维向量只有三个分量。这是张量与向量最直观、最简单的对照。n 阶矩阵可以作出一个二次曲面，所以张量这个源自抽象代数的概念天然与几何学有关系。事实上，张量概念在很大

① 电磁场方程不满足伽利略变换不变性。
② 但并没有用 tensor 指称，索墨菲称之为六元矢量，还有很多论文没有给出名辞。
③ 这是与牛顿的微积分完全不同的微分法。

的程度上是出于几何学的推动。

张量数学由于其本身的复杂性，使得数学家在创造它的时候经历了相当漫长的过程。张量数学有两个方面较为复杂：一个是张量概念没有现实模拟物，也就是无法想象张量的现实形态；另一个是张量分析作为曲线坐标系中的微分方法，是建立在活动标架基础上的，比牛顿、莱布尼兹的微积分要复杂许多。

粗略地讲，张量数学的历史是从哈密顿的四元数理论开始的。四元数理论开创了数学理论高度抽象的先河，打开了创建新数系的大门，在此之后，超复数、矩阵、向量、张量相继产生。由于四元数理论是电磁学的基础，所以沿着四元数理论的方向，数学家和物理学家主要围绕电磁学的内容发展相关理论，其中主要的问题是电磁场方程的协变性问题[①]。这段时间大约是从 1866 年到 1910 年。

与此相伴随，1854 年的时候，黎曼借用高斯的几何学思想，结合格拉斯曼和凯莱的高维空间思想，设想了一种高维弯曲空间的内蕴几何学[②]，这是张量分析的源头。

概而言之，张量概念有三个源头：电磁学[③]、抽象代数和微分几何学。大体上讲，张量概念由电磁学和抽象代数引起；张量分析由微分几何学推动。当然，张量概念最终被人们理解，是在张量分析产生之后。

[①] 即坐标系变换时，场方程的形式不变。之所以有这样的要求，是因为场方程揭示的是客观世界的固有性质，不会随着位置的变化而变化。当时，由于洛仑兹变换式尚未出现，人们发现电磁场方程不满足伽利略变换不变性。

[②]现在称为黎曼几何学，据作者考证，这个名词始于外尔（H.Weyl，1885-1955），详见第四章。

[③] 过去有一种观点认为“张量”起源于力学，有许多弹性力学的教材都是这样介绍 tensor 的，这是一种误解，看到“张”就想到“弹性”。后面我们将看到，这个“张”是指“扩张”。

第一节 格拉斯曼的几何演算：首次引进"扩张量"

不要相信所有的物理概念，但是要相信数学方案，甚至表面上看去，它与物理学并无联系。

—— 狄拉克

格拉斯曼 1844 年创作的数学方法在当时是过于超前了，他的全部数学工作可以归结为两件事：几何演算（现在称为向量运算法则）和外代数。几何演算导致了向量分析的产生，这门学问在 1873 年由麦克斯韦成功地应用到电磁学方程中，表现了解析几何之后更强有力的向量分析的实际意义。我们知道解析几何的直接后果是微积分学的产生，而向量分析则在本质上超越了普通的运算法则，为后来的张量分析和代数几何学创造了新的概念系统。现在，虽然向量分析已经成为多元函数微积分学的一部分，构成了场论的基本内容，但是向量分析与古典分析学之间仍然存在本质的不同，这种区别最关键之处在于向量值函数的运算满足几何演算法则，与凯莱的矩阵方法异曲同工，这是古典分析学所不具备的，因而古典分析学难以解决复杂曲面的微积分运算。之所以说格拉斯曼超前于他的时代，还因为他提出的外代数的方法，这种方法直到以张量分析为基本工具的黎曼几何学建立之后，才因为嘉当的工作而找到实际的应用。"直到 1900 年，嘉当发展出微分形式的运算，格拉斯曼的外代数才不再被怀疑。"[①]

格拉斯曼从"量和运算"的角度理解"向量"，把向量的加法（减法）、数乘以及向量和向量的数量积看作新的运算，向量不是"数"的简单扩大，格拉斯曼所关注的不是"数"的扩大，而是"量及运算"的扩张（extension）[②]，这是对莱布尼兹的继承。17 世纪初，莱布尼茨提出一个宏伟的设想：如何创造一种数学语言，利用它可以直接进行几何计算和几何推理？这是通过数学语言直接进行几何计算，直接处理几何体，从而以一种既解析又综合的方式研究几何学。经过一个半世纪，莱布尼茨的设想最终由格拉斯曼实现。

19 世纪中期，首先是格拉斯曼建立了后来以他的名字命名的向量和多向量的外代数系统。根据格拉斯曼的观点，一个代数用于表示几何的物体，如果通过代数的

---

① J.Dieudonne, *The tragedy of Grassmann*, Linear and multilinear algebra 8, (1979), p1-14.
② H.Grassmann, *Linear extension theory*, 1994, transl. by L.C Kannenberg, *Ausdehnungslehre*, (1844).

加、减、乘、除等运算，能够表示纯粹的几何对象的加、减、乘、除等运算，得到的代数运算结果依然是纯粹的几何体，那么，这个代数就是一种几何语言，通过它可以直接进行几何计算。

有了这些认识之后，格拉斯曼发现了新的分析方法，正如他自己所描绘的那样："我正在寻求一种几何积的概念，当我把这种几何乘积的观念融入到以前建立的几何和的思想时，竟然有惊人的一致性。我意识到分析的新领域出现了，这个新的领域将会产生重要的结果。利用这种新分析可以发展和表达许多新的概念，利用这样形成和扩张产生的分析，能够将数学应用于大自然的最简单、最对称的形式表达出来。这正是本书要表达的思想：几个点的和是它们的质心，两个点的积是它们的向量，三个点的积是由它们决定的表面积，四个点的积是由它们决定的空间量。"[①]

格拉斯曼使用这些新的分析工具，对拉格朗日的《分析力学》进行了重构。由于这件工作，格拉斯曼实际上已经掌握了向量分析的基本方法，格拉斯曼构造了向量分析中的许多重要的技术，包括多重积的几何意义。"我们现在所使用的向量空间中的抽象元素——现代向量的概念，就是格拉斯曼创造的。"[②]

格拉斯曼的《线性扩张论》用了很大的篇幅讨论扩张量的代数运算规则，也就是现在的向量运算规则，在这个基础上，格拉斯曼推广了解析几何中的坐标变换公式。

设 a, b, c 是三个基本度量，e_1，e_2，e_3是三个互相独立的基本度量，并且彼此正交。现在的问题是：一个量 p 如何用正交的基本度量表示？如何在不同的坐标系进行表示？

为了解决这个问题，格拉斯曼又设：

p = xa+yb+zc，并且 f (x, y, z)=0，这个函数定义了一个曲面。如果：

$p = u_1e_1+ u_2e_2+ u_3e_3$，则有：

$$f(\frac{pbc}{abc},\frac{apc}{abc},\frac{abp}{abc})=0$$

表示新变量 u_1，u_2，u_3，代换 p 的值，考虑变换方程：

$q = v_1e_1+ v_2e_2+ v_3e_3$

如果：$e = \alpha a+\beta b+\gamma c$

则得到：

[①] H.Grassmann, . *Ausdehnungslehre*, 1862 , transl. by L.C.Kannenberg, *Linear extension theory*, 2000, American mathematical society, p13-17.

[②] D Hestenes, *Grassmann's vision*, in *Hermann Gunther Grassmann(1809-1877): Visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, 1996, Kluwer Academic publishers, p191-201.

$$f(\frac{qbc}{abc}+\alpha,\frac{aqc}{abc}+\beta,\frac{abq}{abc}+\gamma)=0$$

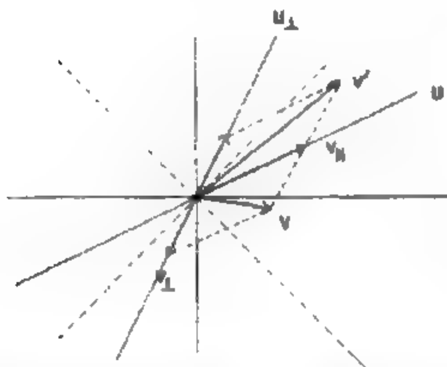
格拉斯曼的坐标变换式是用他的扩张量表达的，实际上就是后来的向量表达或者是多值函数的表达方式，这与凯莱的理论有区别。坐标变换是自解析几何开始就被高度关注的内容，经过变换，可以化难为易，简化曲线方程。更重要的是，有些量经过坐标变换后保持不变，这是事物固有的性质，不会随着坐标系（或空间）的变化而变化。这种寻找坐标变换不变量的传统导致了两个方向的发展：第一，沿着射影几何方向；第二，发展出向量概念。向量本身就是不随坐标系改变的量。

格拉斯曼的扩张量概念同样是这种传统的发展结果。所谓"扩张量"，格拉斯曼没有给出一个清楚的定义，从扩张量的性质来看，指的就是向量。格拉斯曼举例说，速度是一个既有大小，又有方向的量；与此类似，力的运算满足"几何和"。这就是格拉斯曼的"扩张量"。现举一例，来欣赏格拉斯曼的理论成果：

向量 v 在方向 u 的双曲镜像可以表示为：

$$v'=u^{-1}vu=u^{-1}(v_{//}+v_{\perp})u=v_{//}-v_{\perp}$$

如图：



格拉斯曼对张量概念的贡献（这是以后来的观察角度来审视格拉斯曼的结果，他当时没有这样的主观动机。）是从他的内积的定义式，可以自然地推导出空间中任意一个二次形式的不变量（格拉斯曼本人没有做这样的工作，由凯莱完成）。[①]、[②]格拉斯曼所说的 extension 完全可以表达张量的本质内涵，但是格拉斯曼凭借一己之力把线性代数的框架建立起来已经很不容易，建立张量概念以及张量分析还需后人的努力。

[①] D.F.Sander, *Hermann Grassmann and the creation of linear algebra*, American mathematical monthly, 10(1979), p809-817.
[②] D.F Sander, *Hermann Grassmann and the prhistory of universal algebra*, American mathematical monthly, 9(1982), p161-166.

第二节 代数形式不变量理论：张量分析的核心

不变量是代数学和物理学的重要的研究内容。物理学中的能量守恒定律揭示的就是不变量：在保守力场里，一个运动着的物体，它的动能和势能的总和是一个不变的常量。这个常量是建立方程的重要依据。数学中有更多的守恒量——不变量，比如实数范围内的加法和乘法的交换律就是一种守恒律：两个数交换了，次序变化了，但是它们的"和"与"积"不变。把这种守恒推而广之，比如二次式 X^2+Y^2，现在把 X 变换为 Y，Y 变换为 X，原来的式子就成了 Y^2+X^2，但结果仍旧等于 X^2+Y^2，没有变化。由于这个代数式经过变换之后，形式上完全没有变化，所以称之为不变量。从这里也可以看出，不变量的理论一定会和线性变换理论有关系。

人们对不变量的认识很早就有，但形成系统理论，却是在 1841 年之后。凯莱是这个革命性进步的发起人，由于凯莱的工作，张量概念产生所必需的向量代数定义、微分形式不变量理论才得以产生。凯莱之后，西尔维斯特、贝尔特拉米等人在不变量领域为张量概念做好了准备工作。

1　代数形式与不变量

不变量理论是在凯莱强有力的手中涌现出来的，但是它最后形成一个完美的艺术品，博得后世数学家们的赞美，主要是由于西尔维斯特的才智以其闪光的灵感照亮了它。

—— P.A. 麦克马洪

不变量理论揭示了 n 维空间中的代数形式所具有的几何上的重要性质，将三维空间中的向量特有的平移和旋转的不变性，推广到了高维的情形。而张量的基本性质就是满足线性变换的不变性条件，所以说，不变量理论是张量概念得以建立的基础理论。

代数形式的不变量理论是从数论中的二次型及射影几何中的线性变换引伸出的课题。1841 年左右，凯莱受布尔的影响开始研究代数型在线性变换下的不变量。之后，寻找各种特殊型的不变量，成为十九世纪下半叶最热门的研究课题。矩阵的发展是与线性变换密切相连的，19 世纪，矩阵是线件变换理论的工具。

所谓不变量理论就是经线性变换将一个代数形式变换为另一个代数形式，若经变换后它们的系数的某个函数 I 满足关系式：

$$I(a_0^{'},a_1^{'},\cdots,a_s^{'})=\Re I(a_0,a_1,\cdots a_s)$$

则称 I 为 f 的一个不变量。譬如在一个直角坐标系下，两个变元 x，y 的二次型

$$f=ax^2+2bxy+cy^2$$

经一个正交变换，变为二次型

$$g=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$$

虽然它们的系数改变了，但是它们系数的某个函数如判别式

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}=ac-b^2$$

是保持不变的，即

$$D=ac-b^2=a'c'-b'^2=D'$$ [①]。

也就是说判别式 $D=ac-b_2$ 是 f 的一个不变量。

1845 年，凯莱发表《线性变换理论》[②]一文，探讨求不变量的方式。他在这些文章中给出了如何求 n 次齐次函数的不变量的计算方式。1846 年，凯莱发表《论线性变换》[③]一文，引入了"协变量"(covariance)的概念。这两篇文章奠定了凯莱作为不变量创立者的地位。

凯莱是第一位表述在一般意义下的代数不变量问题的数学家，他第一个深入研究求不变量的一般方法，创造了处理不变量的符号方法，并且得到了一系列重要结果。凯莱在 1843 年即开始计算 n 次型的不变量，即在变换下 n 次型具有哪些不变量——经变换后保持形式不变[④]。受凯莱的影响，西尔维斯特在不定量理论的创立过程中也做了许多杰出而基本的工作，"不变量"(invariant)这个术语就是西尔维斯特引进的。凯莱对不变量理论倾注了极大的热情与精力，他的工作开创了 19 世纪下半叶研究不变量理论的高潮。在 19 世纪 70—90 年代，数学家们利用不变量理论统一了数学中的许多领域，凯莱开创的这一数学理论显示出了异乎寻常的意义。凯莱富有深远意义的创造性的数学成就，不仅对数学发展产生了深远影响，而且为物理学的研究准备了必不可少的工具，这种对物理学的影响甚至是超越时代的。凯莱开创的不

① A.Cayley, *On linear transformation*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, vol I,(1846),p104-122
② A.Cayley, *On the theory of liner transformation*, in *Cambridge mathematical journal*, vol.IV, (1845), p193-209
③ A.Cayley, *On linear transformation*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, vol I,(1846),p104-122
④ A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of n- dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127

变量理论，不仅在数学中成为重要而基本的内容，而且在 20 世纪通过不变量对物理学的研究产生了直接的影响，最早的几何化引力理论就是以洛伦兹协变理论为基础的。

有了线性变换这个工具，从 1854 年开始，凯莱连续发表了一系列共 10 篇论代数形式的学术论文，"代数形式"(quantics)是他用来指称 n 个变量的齐次多项式的名词。凯莱指出：所谓代数形式是指包含 n 个变元 x_1，x_2，…，x_n 的 m 次齐次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，最常见的是二次型。关于代数型的研究主要围绕着三个课题，一是对不变量的研究；二是二次型的化简；三是关于二次型正定性的判定。凯莱的这十篇论文论文[①]中得到了一系列关于不变量的结果。如对于二元四次型：

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

凯莱经证明了 f 的黑塞(Hesse)行列式：

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

是 f 的协变量，并且证明 $g^2=ac-4bd+3c^2$ 是 f 的不变量。[②]

1851 年，凯莱发表《超行列式理论的特殊发现》[③]，考察线性变换的不变量，凯莱写道：

我将给出一个关于线性变换的新的、更简单的方法。作为例子，考察下面的函数：

$$(p_1x+q_1y)^{2n+1}+(p_2x+q_2y)^{2n+1}+\cdots+(p_{n+1}x+q_{n+1}y)^{2n+1}$$

---

① 1854, *An introductory memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 144, p109-125.
1856, *A second memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 146,p101-126.
1856, *A third memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 147,p43-56.
1858, *A fourth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 148,p415-427.
1858, *A fifth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 149,p420-460.
1859, *A sixth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*. 150,p61-90.
1861, *A seventh memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 151,p277-292.
1867, *A eighth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 157,p513-554.
1871, *A ninth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 161,p17-50.
1878, *A tenth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 169,p603-661

② 转引自 Dictionary of scientific biography, vol.5, 1975, New York, Charles scribner's sons.

③ A.Cayley, *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminant*, in *Philosophical magazine*, 1851, p391-410.

我们可以经过变换得到：

$$a_{n+2}-a_{n+1}\sum\lambda_1+\cdots\mp a_1\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0$$

进一步得到：

$(x+\lambda_1 y)(x+\lambda_2 y)\cdots(x+\lambda_{n+1}y)$ 的行列式是：

$$\begin{vmatrix} x^{n+1} & -x^n y & \cdots & \pm y^{n+1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdot & a_0 \\ \vdots & & & \\ a_{2n+1} & a_{2n} & & a_n \end{vmatrix}$$

这就是凯莱发现的寻找不变量的一般方法，这篇论文的绝大部分是这个方法的应用。凯莱研究线性变换下的代数形式不变量，目的在于揭示代数形式与几何的关系。他以代数观点研究几何问题，在研究不变量问题时，他致力于代数形式的几何解释。为了要证明度量概念能够用射影语言来表达，凯莱致力于欧氏几何与射影几何关系的研究。凯莱证明：长度和角度这些度量的性质可以用射影关系来决定。1859年，凯莱甚至说："射影几何是所有的几何，反之亦然。"[①]考虑用代数方法研究几何问题，实际上也是凯莱试图弄清楚当时新出现的非欧几何与其他几何关系的重要方面，他非常渴望能将非欧几何、仿射几何、欧氏几何在某种形式下统一起来。

凯莱对现代数学的贡献是非常重要的，仅仅不变量理论一项，就对现代数学以及现代物理学产生了非常关键的作用。他关于矩阵以及行列式的理论，对量子物理学起了基础工具的作用。

简单说，凯莱的不变量理论是考察这样一个代数形式 $\rho x_i'=\sum a_{ij}x_j$，在线性变换下，具有怎样的性质。即：

假若： $P(x^0,\cdots,x^N)\equiv P'(x'^0,\cdots,x'^N)$

则有：
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0^0} & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_0^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N^N} \end{vmatrix} P \equiv |a_{ij}| \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0'^0} & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N'^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_0'^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N'^N} \end{vmatrix} P'$$

[①] 1859, *A sixth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 150,p61-90.

这样的结论，后来影响到了贝尔特拉米，为解决黎曼的 n 维流形中的微分形式的有关计算，准备了方法基础。

2　向量的代数定义

关于线性变换以及代数形式不变量的研究，所产生的最直接的后果是获得"向量的代数定义"。如果没有向量的代数定义，张量概念是不可能得到的，因为如果人们只知道向量的图示表示，那就不可能产生抽象的、没有直观对应物的张量，要知道张量不仅是高维空间的"向量"，更多的时候，张量所表达的是若干方程组的全部信息。

向量的代数定义最早由凯莱提出，这成为张量概念形成的最重要的步骤。凯莱一生的主要工作之一是对不变量理论的研究。他通过不变量理论来研究、解决几何问题，他对射影几何的突出贡献就是在这样的思想指导下完成的。"从 1840 到 1850 年代，一个规模很小但非常高产的英国数学家群体，在 *Journal* 上发表数学研究的论文，他们包括 R.L.Ellis(1817-1859)，A.Cayley(1821-1895)，J.J. Sylvester(1814-1897) 和 G.Salmon(1819-1904)。他们的工作经常表现出严格的抽象性，不过仔细阅读之后会发现，他们的代数结果往往体现出几何解释的重要性。"[1]

在凯莱时代之前，向量分析已经很成熟了。向量分析作为一种使用坐标系对空间性质进行计算的工具，是一种几何方法。向量分析这种相对具体的方法，引导数学家转向更加抽象的空间表达方式(也就是后来发展出的张量)。凯莱在这样的背景下，引进矩阵代数方法，扫清了数学进化的道路。

运用矩阵代数方法，凯莱对线性变换进行了研究，从而得出了向量的代数定义。这方面的工作总结在 *On linear transformations*[1]（1846）和 *On the theory of linear transformations*[2]（1845）两篇论文中。

在 1845 年论文中，凯莱研究了下面的问题：

如果函数 $U=\sum\sum(rs.x_r y_s)$，通过替换

$$x_r = a_r^1 x_1' + a_r^2 x_2' + \ldots + a_r^m x_m'$$
$$y_s = b_s^1 y_1' + b_s^2 y_2' + \ldots + b_s^m y_m'$$

[1] J.L. Richards, "Projective geometry and mathematical progress in Mid-Victorian Britain." *Studies in the history and philosophy of science*, 17(1986), 297-325

变换为：$U' = \sum\sum(r's'x_r'y_s')$

那么系数函数 a,b 满足关系：

$$\begin{vmatrix} 1'1',1'2',\cdots \\ 2'1',2'2',\cdots \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1,a_2^1,\cdots \\ a_1^2,a_2^2, \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1,b_2^1,\cdots \\ b_1^2,b_2^2, \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11,22,\cdots \\ 21,22, \\ \vdots \end{vmatrix}$$

针对这个问题，凯莱在这篇 14 页的论文中，详细地研究了系数函数的各种取值。这个工作为 1846 年论文作了基础工作。在 1846 年论文中，凯莱明确了向量的代数意义，他在文章的开头清楚地表达了：

延续我目前课题的研究，我已经得出了新的考虑问题的方法，同时也是更一般的方法。这种方法对任意阶的两变量函数的处理有很大的优势。事实上我们可以解决这样的问题："发现一种方法：对任意多函数的所有导数，使这些导数具有这样的性质：在变量的任意线性变换之后保持它们的形式不变。

凯莱的新思想导向了线性变换不变形式的研究，这篇论文的重要意义在于引进"协变"量[①]，而且通向了向量的代数定义。下面，我们来梳理凯莱在这篇文章中的核心内容：

假设 p 个 m 变量数列：

$x_1, y_1, \cdots \qquad x_2, y_2, \cdots \qquad \cdots\cdots \qquad x_p, y_p, \cdots \qquad (p \ge m)$

与之对应，p'个 m'变量数列：

$x_1', y_1', \cdots \qquad x_2', y_2', \cdots \qquad \cdots\cdots \qquad x_p', y_p', \cdots \qquad (p' \ge m')$

设相似变量：$\dot{x}_1, \dot{y}_1, \cdots$ 以下列方程相联系

① "covariant" 这个词是 J. J. Sylvester 引进的。

$x=a\dot{x}+b\dot{y}+\cdots$

$y=a'\dot{x}+b'\dot{y}+\cdots$

$\vdots$

$x'=a'\dot{x}'+b'\dot{y}+\cdots$

$y'=a''\dot{x}'+b''\dot{y}'+\cdots$

$\vdots$

这里，x,y依赖于$x_1,y_1,\cdots$、$x_2,y_2,\cdots$、$x_p,y_p,\cdots$；x',y'依赖于$x_1',y_1',\cdots$、$x_2',y_2',\cdots$、$x_p',y_p',\cdots$。

再设：$\xi=\delta_x$， $\eta=\delta_y$ 这里$\delta_x,\delta_y,\cdots$表示$x,y\cdots$的微分。

容易得到：

$$\dot{\xi}=a\xi+a'\eta+\ldots$$
$$\dot{\eta}=b\xi+b'\eta+\ldots$$
$$\vdots$$

以及类似的关于$\dot{\xi}',\dot{\eta}',\cdots$的方程。

设$|\Omega|=\begin{vmatrix}\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\xi_p\\ \eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots\eta_p\\ \vdots\end{vmatrix}$，类似地定义$|\Omega'|$，就是说$|\Omega|$是任意 m 个垂直列组成的行列式序列。

另外，设：

$$E=\begin{vmatrix}a,b,\cdots\\ a',b',\cdots\\ \vdots\end{vmatrix}，\quad E'=\begin{vmatrix}a',b',\cdots\\ a'',b'',\cdots\\ \vdots\end{vmatrix}$$

由行列式的性质：

$$|\dot{\Omega}|=E|\Omega|，\quad |\dot{\Omega}'|=E'|\Omega'|，\quad \cdots$$

因此，如果： $\square = F(|\Omega|^{f},|\Omega'|^{f'},\ldots)$ （□是一个有理整函数。）

我们立即可以得到：$\square = E^{f}E'^{f'}\cdots\square$

那么对于函数U，就有线性变换：$\square\dot{U}=E^{f}E'^{f'}\cdots\square U$ （函数$\square U$是一个超行列式[①]的导数，符号“□”称为超行列式导数符号。）

到目前为止，凯莱完成了“协变”量的定义和运算，在论文剩余的 26 页篇幅的

① 超行列式（hyperdeterminant）：Cayley 引进的表示不变量性质的函数。

讨论中， 他进行了相关不变量的详细计算。凯莱的结论启示了后人，从向量的现代定义中我们可以看到这一点[1]，他们同样表示了向量在坐标变换下的不变性[2]。

正如所有的科学发展一样，凯莱的方法显得很烦琐，并不清楚。这是因为他在这里还没有认识到正交矩阵的性质和应用。但是凯莱的贡献是很重要的，一方面他引进了线性变换的研究；另一方面，他对不变量理论的新观点指明了向张量数学发展的途径。事实上，里奇最终能够实现绝对微分学的张量表达，在很大程度上依赖凯莱的工作。

3 西尔维斯特的代数形式不变量理论——贝尔特拉米的阶梯

也许我可以并非不适当地要求获得数学上的亚当这一称号，因为我相信数学理性创造物由我命名的（已经流行通用）比起同时代其他数学家加在一起还要多。

—— J.J. 西尔维斯特

西尔维斯特（Sylvester，James Joseph，1814－1897，英国）一生致力于纯数学的研究，他和凯莱、W. R. 哈密顿(Hamilton)等人一起开创了自 I. 牛顿(Newton)以来英国纯粹数学的一个繁荣局面。他的成就主要在代数方面，他同凯莱一起发展了

---

[1] 向量的代数定义：一个有序数组 (a_1,a_2,a_3)，如果在坐标变换下为关于变换系数 $C_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ 由变换式决定的一次齐次式，则称之为向量。

[2] 设在 R^5 中有另一个坐标系 $\{O;x_1',x_2',x_3'\}$，其标架为 $\{e_1',e_2',e_3'\}$，它与 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 之间的关系为

$$\begin{cases} e_1'=C_{11}e_1+C_{12}e_2+C_{13}e_3 \\ e_2'=C_{21}e_1+C_{22}e_2+C_{23}e_3 \\ e_3'=C_{31}e_1+C_{32}e_2+C_{33}e_3 \end{cases} \tag{1.1}$$

由于单位向量 $e_i\,(i=1,2,3)$ 之间互相正交，$e_i'\,(i=1,2,3)$ 之间也互相正交，因此矩阵

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

将是正交矩阵，即有 $C^{-1}=C^T$，其中上标 T 表示转置。从(1.1)可反解出

$$\begin{cases} e_1=C_{11}e_1'+C_{21}e_2'+C_{31}e_3' \\ e_2=C_{12}e_1'+C_{22}e_2'+C_{32}e_3' \\ e_3=C_{13}e_1'+C_{23}e_2'+C_{33}e_3' \end{cases} \tag{1.3}$$

向量 a 在新坐标系 $\{O;x_1',x_2',x_3'\}$ 中的分解记为

$$a=a_1'e_1'-a_2'e_2'+a_3'e_2' \tag{1.4}$$

将(1.3)代入 $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$，得到

$$\begin{cases} a_1'=C_{11}a_1+C_{12}a_2+C_{13}a_3 \\ a_2'=C_{21}a_1+C_{22}a_2+C_{23}a_3 \\ a_1'=C_{31}a_1+C_{32}a_2+C_{33}a_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

行列式和矩阵的理论，共同奠定了不变量的理论基础。此外对代数方程论、数论等诸领域都有重要的贡献。

西尔维斯特在数学方面的成就除了上面所述之外，在微分方程、椭圆函数和 θ 函数方面也做过一些有益的工作，并著有《椭圆函数论》(Treatise on elliptic functions, 1876)一书。西尔维斯特具有丰富的想像力和创造精神，活泼、机敏，善于用火一般的热情介绍他的思想。他自称“数学亚当”，一生创造过许多数学名词，流传至今的如“矩阵”、“不变式”、“判别式”等都是他首先使用的。

西尔维斯特的不变量理论研究具有非常重要的历史意义，他不仅给出了“不变量”invariant 这个词，最重要的是他从 1851 年开始，把不变量分为协变量和反变量两种形式，定义和刻画了代数形式的“协变量”（covariant），这是通向一般坐标系中微分运算的重要步骤。到 1853 年，西尔维斯特共发表了 6 篇论文，系统阐述关于“covariant”和“contravariant”的定义和运算。

在第一篇论文《结合代数形式的一般理论》[①]（1851）中，西尔维斯特定义了 covariant：

设齐次函数 F(x, y, z) 和 G(u, v, w) 相互独立，如果它们之间可以按照相同的法则互相推出，则这两个形式是结合的，或称为彼此相伴。其中第一种伴随式这样定义：它从与这两个代数形式相关的等式中以严格相等的方式推出，这被称为协变量；第二种与之相反，被称为反变量。

西尔维斯特在第二篇论文《典型形式和超行列式的绝妙发现》[②]中，在计算了很多代数形式的不变量之后，他说：“若 $P(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的协变量，当且仅当 $P(lx+my, nx+py)$ 与 $f(lx+my, nx+py)$ 严格地相关，且 $lp-mn=1$。”西尔维斯特对协变量的定义与后来建立在对偶空间中的协变量有些不同，但是如果赋予西尔维斯特的协变量以几何意义，那么这两者的含义很相似，只不过西尔维斯特是从纯粹的代数形式来思考问题的。协变量的引入，是西尔维斯特对线性变换理论的深入研究之后得出的，这种符号系统的好处在于可以方便地表示线性变换。

西尔维斯特的第三篇论文《关于形式演算的规则》[③]中简单地表述了协变量：

[①] J.Sylvester, *On the general theory of associated algebraical forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VI. (1851), p289-293.
[②] J.Sylvester, *On a remarkable discover in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*, in *Philosophical magazine*, II, (1851), p391-410.
[③] J.Sylvester, *On the principle of the calculus forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VII. (1852),

如果有两个系统：x,y 和ξ，η，那么 xξ－yη是它们的一般协变量。因此 $\Phi(x,y)\times\Phi(\xi,\eta)+\lambda(\xi x-\eta y)^m$ 是 $\Phi(x,y)$ 的协变量。

这与现代的含义是一样的，西尔维斯特用构造的方式表达了他的协变量概念。他继而写道：“$\times_1 f$，$\times_2 f$，……，$\times_\mu f$ 是 f 的协变量序列。”我们知道，现代数学对协变量的定义的本质是一种分量，与西尔维斯特意义上的协变量一致。接下来他举的例子是：

设 $f(x,y)$ 是关于 x,y 的 2m 阶函数，那么

$$(\frac{d}{dx})^m,(\frac{d}{dx})^{m-1}\frac{d}{dy},\cdots\cdots,(\frac{d}{dy})^m$$

是协变量序列。

这个结论可以直接用到微分几何中去，并在一定程度上启发了贝尔特拉米的微分形式不变量。希尔维斯特接着发表了与第三篇文章同名的第四篇论文[①]，给出了求协变量的具体例子：

设 $\Phi=ax^5+5bx^4y+10cx^3y^2+\cdots\cdots+fy^5$，它的协变量是：

$$\begin{vmatrix} ax+by & bx+cy & cx+dy \\ bx+cy & cx+dy & dx+ey \\ cx+dy & dx+ey & ex+fy \end{vmatrix}$$

这个结论在高维仿射几何中有应用价值。希尔维斯特的第五篇论文是《形式运算的注记》[②]，得出了与黑塞（Hesse）相同的结论；第六篇《关于两个代数函数合冲关系的理论》[③]中重申了协变量的定义：“协变量是这样一个函数：它依赖与原初函数相同的关系，使得它由线性变换导出的时候与它原初的导出变换形式相同。”

---

p52-97.

① J Sylvester, *On the principle of the calculus forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VII (1852), p179-217.

② J.Sylvester, *Note On the calculus of forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VIII (1853), p62-64.

③ J.Sylvester, *On the theory of the syzygetic relation of two algebraical functions* ,in *Philosophical transactions of the*

西尔维斯特对不变量理论的贡献是巨大的，他不仅计算了大量的代数形式不变量，而且发现了新的不变量形式——协变量，为代数形式表达几何对象向高维发展开辟了新的道路。下面我们通过西尔维斯特的一封书信，来体会张量数学先驱的数学思想。

1850年10月26号，西尔维斯特写给凯莱的信中说：

我找到一个3^4阶3元方程的解决办法：

设：

U是给定的关于x, y, z的函数，将此函数变换为：

$$a^3\xi^3+b^3\eta^3+c^3\zeta^3+6\varepsilon abc\xi\eta\zeta$$

我发现，p,q满足方程：

$$U+p\Delta U+q\Delta^2U=0$$

然而：

$$\frac{(1+\delta\varepsilon^3)^2}{\delta\varepsilon^6+20\varepsilon^3-1}=\pm(\Delta U)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{q}{p}$$

因此得到：

$$\xi\eta\zeta=\pm 3(1+2\varepsilon^3)^3(\Delta U)^{\frac{1}{2}}U-(10\delta\varepsilon^6+(1+2\varepsilon^3)^3)\Delta^2U$$

ξ,η,ζ可以通过两个三次式解出，问题得解。[⑩]

西尔维斯特以及凯莱的不变量理论是通向张量概念的阶梯，如果没有对代数形式的不变量的清楚认识，张量这种保持某种变换不变性的数学量是不可能建立起来的。

Royal society of London, CXLIII, (1853), p407-548.

[⑩] K.H.Parshall, *James Joseph Sylvester: Life and work in letters*, Oxford, 1998, p25

第三节　矩阵表征：向量和张量的共同语言

这就是结构好的语言的好处，它的简化的记法常常是深奥理论的源泉。

—— P.S. 拉普拉斯

按照现代的方式，张量的引进是考虑一个线性变换：

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = T_{11}x_1 + T_{21}x_2 + T_{31}x_3 \\ \bar{x}_2 = T_{21}x_1 + T_{22}x_2 + T_{32}x_3 \\ \bar{x}_3 = T_{31}x_1 + T_{32}x_2 + T_{33}x_3 \end{cases}$$

这个变换式可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

也可以写成缩略式：$x_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ij} x_i$，式中的 T_{ij} 也就是上面式子中的 3×3 矩阵，被称为一个二阶张量。

在张量概念，乃至抽象代数的建立过程中，像矩阵这样的代数系统起了很重要的作用，或者说是在相互的促进中，一个个新的代数系统被创造出来。1843 年哈密顿提出的四元数是第一个不满足交换律的代数系统，在此之后，凯莱的矩阵理论和格拉斯曼的超复数系统相继产生，所不同的是，后两者是 n 维空间中的数系，是更加抽象的代数系统。

由于英国学派的努力，行列式和矩阵在十九世纪受到极大的关注，向量的概念，就是一个有序三元数组的集合[①]，用来表达向量的行列式和矩阵虽然只是一种为了方便而采取的符号，但它的大多数生动的概念能对新的思想领域提供钥匙，这两个概念是数学物理上高度有用的工具。

1848 年，西尔维斯特（J. J. Sylvester，1814-1897）首先提出了矩阵（matrix）这个词，它来源于拉丁语，代表一组数。1855 年矩阵代数得到了凯莱的进一步发展，凯莱系统研究了矩阵理论，包括零矩阵、单位矩阵、转置矩阵、对称矩阵、斜对称矩阵的定义与性质；两个矩阵的和与积；研究了线性变换的组成并提出了矩阵乘法

[①] 在下一节将看到向量这个三元数组还必须满足线性变换不变性的条件，这是在凯莱提出向量的代数定义之后被揭示出来的。

的定义，使得复合变换的系数矩阵变为两个矩阵的乘积；他还进一步研究了那些包括矩阵的逆在内的代数问题。

矩阵论为向量空间的研究提供了很好的表达方式，也就是拉普拉斯说的好的结构的语言。现代的向量空间理论结合了凯莱用矩阵表达的线性变换理论和格拉斯曼定义的以向量积为基础的 n 维向量空间理论，这里我们来讨论矩阵观点下的向量空间。1841 年凯莱已经引入两条竖线作为行列式符号，后为世人采用。

1855 年，凯莱在研究线性变换的不变量时，系统地提出矩阵概念及其运算法则[①]。矩阵论是凯莱的一项重要数学工作，他被认为是矩阵论的创立者。他曾指出，从逻辑上来说，矩阵的概念应先于行列式的概念，但在历史上却正好相反。矩阵是继四元数之后的又一类不满足乘法交换律的数学对象，它们和群论都是推动抽象代数观点形成发展的重要因素。在凯莱之后，矩阵理论不断完善，不仅成为数学中的锐利武器，还是描述和解决物理问题的有效工具。他第一个将矩阵作为一个独立的数学概念、对象而讨论，并且首先发表了一系列讨论矩阵的文章。

在 1858 年的第一篇矩阵论的专题文章“矩阵论的研究报告”[②]中，凯莱引进了矩阵的基本概念和运算。给出了零矩阵、单位矩阵的定义。两个矩阵的和的矩阵定义为其元素是两个相加矩阵的对应元素之和，他注意到，上述定义不仅适用于 n×n 矩阵，而且可用于任意的 m×n 矩阵，他指出，矩阵加法满足结合律和交换律。凯莱给出了矩阵乘法的定义，并着重强调，矩阵乘法是可结合的，但一般不满足交换律。对于一个数 m，凯莱定义 mA 为这样的矩阵，其每一个元素都是 A 的对应元素的 m 倍。

凯莱在文章中说：

对于线性方程组：

$$\begin{aligned} X &= ax+by+cz \\ Y &= a'x+b'y+c'z \\ Z &= a''x+b''y+c''z \end{aligned}$$

可以更简单地表示为：

$$(X,Y,Z)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}(x,y,z)$$

---

① A.Cayley, *Nouvelles recherches sur les covariants*, in *Journal fur die reine und angewandte sur les covariants*, tom. XLVII, (1855), p109-125.

② A.Cayley, *A memoir on the theory of matrices*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, vol. CXLVIII, (1858), p17-37

在定义了零矩阵、单位矩阵、矩阵加法运算、数乘矩阵运算之后，凯莱明确指出矩阵的运算就是方程组的运算。

方程L = -M表示矩阵L与M之和等于零矩阵．也就是说符号相反的矩阵可以称为负矩阵．

给定方程的对偶矩阵计算如下：

如果$\nabla=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$，则它的对偶矩阵有下列方程给定：

$$A=\frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

即：
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=\frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} \partial_a\nabla & \partial_{a'}\nabla & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla & \partial_{b'}\nabla & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla & \partial_{c'}\nabla & \partial_{c''}\nabla \end{vmatrix}$$

对于三次方程：

$$M^3-AM^2+BM-C=0$$

有：

$$M+C=\begin{vmatrix} a+C & b & c \\ d & e+C & f \\ g & h & l+C \end{vmatrix}$$

凯莱的矩阵论解决了许多方程论的问题，这为他建立n维空间理论奠定了基础，在他的《n维空间解析几何》的论文中（第一章已经梳理过这篇论文），凯莱立足于方程组的矩阵分析，得到了若干几何学结果。这不仅为现代数学的发展提供了思想基础，而且直接创造了构造现代数学的语言系统，向量分析和张量分析都是以矩阵语言表达的。如果没有矩阵理论，不仅向量的高维、高阶推广不能实现，就是方程理论也很难有现在的成绩。

第三章 协变理论：张量概念形成的电磁学进路

赫尔曼 闵可夫斯基统一了时间和空间，而爱因斯坦令它们发生了弯曲。

—— 索恩

tensor 一词源自于电磁学，而不是传统认为的来自力学。tensor 的确与 tension 存在关联，但不是像传统认为的 tensor 起源于“张力”。与张量概念的数学起源不同，电磁学中的张量采取了更直接的思路和概念表达方式。

第一节 “tensor” 的首次出现及最初含义

tensor 这个词最早出自哈密顿的《四元数基础》[1]（Elements of quaternion，1866），这本书共有 173 处(依据计算机统计结果)出现“tensor”。在此之前，格拉斯曼在 1843 年曾用 extension 表示一种扩张的量，所谓扩张是指运算不再局限在数的范围，还包括几何量；并且这种几何量是 n 维空间中的。应当说，格拉斯曼的 extension 是张量概念的前驱，但是哈密顿与格拉斯曼走了不同的路，哈密顿当时一直想建立四元的分析系统，应当说他在某种程度上与格拉斯曼相似，而与当时的向量分析有很大的不同。当时的情况是：向量分析尚未建立起来（要到 1873 年麦克斯韦建立电磁学理论，向量分析才算初具规模），但是由哈密顿和格拉斯曼引领的抽象代数结构已经暗含了张量的概念，尽管他们两人的理论仍然是关于向量的。这反映出哈密顿的四元数理论有很强的包容性，可以同时为张量概念和向量分析提供思想。

哈密顿用 tensor 一词来指称一种“与向量有关的量”，但并没有给出一个固定的说法，而是使用了很多种描述性的文字：[2]tensor of a vector，tensor of a quaternion，denote the length of the line，tensor, being a positive scalar，the tensors of opposite quaternions are equal，square of tensor，a tensor, bing always, a positive number，the scalar of a quaternion depends only on the tensor and the angle，connexion between scalars and tensors(or norms) of quaternion，the sum of the tensors is greater than the tensor of the sum(与柯西不等式类似)，the tensor of the ponential，value of the tensor，in this symbol

[1] William R.Hamilton. *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1866.
[2] 为了体现原始的 tensor，这里不做翻译。下文还有与之类似的情况，用意与此相同。

of a tensor, for the square of a vector…从哈密顿的理论来看，他的 tensor 是指“向量的模”，这可以在赫维塞德（O.Heaviside，1850-1925）的《电磁理论》[1]（Electromagnetic theory，1893）中找到辅证：赫维塞德定义 tensor 为 magnitude(长度)[2]，他说：

The **tensor** of a vector is its size, or magnitude apart from direction.[3]

[4]他还给出了计算公式：the tensor of ∇P is given by

$$(\nabla P)^2=(\nabla_1 P)^2+(\nabla_2 P)^2+(\nabla_3 P)^2$$

从赫维赛德的解释可以确定，哈密顿的 tensor 的确是指“模”，这与现在使用 module 指称向量的长度，本质上是一样的。

虽然哈密顿的 tensor 与现在的“张量”指称不同，但是它们之间存在一种关联，那就是都与超复数系统相关，后人将 tensor 用来指称与哈密顿的含义不同的概念，这是原因之一。

在《四元数基础》中，哈密顿提到了他引进 tensor 一词的思想来源：

[5]Suppose now that $q = \beta : \alpha$ is (as at first) a general quaternion, or the quotient of any two vectors, α and β, whether equal or unequal in length. Such a Quaternion will not (generally) be a versor (or at least not simply such), according to the definition lately given ; because its effect, when operating as a factor on α, will not in general be simply to turn that line: but will (generally) alter the length* , as well as the direction.

* By what we shall soon call an act of tension, which will lead us to the consideration of the tensor of a quaternion.

哈密顿认为向量的长度的改变，类似于一条线受到拉力的作用而发生变化，所以他就用 tension 的变形来作为“向量的长度”的指称。这是 tensor 一词的真实来源，而与通常所说的：张量概念起源于力学，是完全不一样的。更重要的是，在哈密顿的观念里，有着与格拉斯曼类似的思想：

[1] 赫维赛德是最早考虑运动物体在运动方向几何量变化的物理学家。
[2] O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p42.
[3] O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p142.
[4] O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p187.
[5] William R.Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1899, p136.

If a, b, c be thus the three positive scalars, which denote the lengths of the three lines, OA, OB, OC; and these three scalars may then be considered as factors,or as coefficients , by which the three unit-vectors Uα, Uβ, Uγ, or OA' , OB' ,OC' (in the cited figure), are to be respectively multiplied , in order to change them into the three other vectors α, β, γ, or OA, OB, OC, by altering their lengths, without any change in their directions. But such an exclusive Operation, on the Length (or on the ***extension***) of a line, may be said to be an Act of Tension. We have then thus a motive for the introduction of the name, *Tensor*, as applied to the positive number which (as above) represents the length of a line. [①]

在这里，哈密顿使用了与格拉斯曼同样的术语：extension，虽然与格拉斯曼有区别，但说明哈密顿具备将向量看作某个空间中的广延量的数学直觉。

tensor 一直到 1910 年仍然指称向量的模，尽管在此之前的数年，福特(Woldemar Voigt，1850-1919)、洛仑兹（Hendrik Antoon Lorentz，1853-1928）、闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864-1909）、彭加勒（Henri Poincaré，1854-1912）、索莫菲（A.Sommerfeld，1868 1951）、劳厄（Max Von Laue，1879-1960）等人在对电磁场方程协变性的研究中，已经使用了一种与向量存在较大差异的新的数学量来表达电磁学的相关量。但是由于 tensor 已经被用于其他场合，所以人们也就没有把新发展出来的数学量与 tensor 联系起来。所以说，在 1890 年代，代表着张量概念发展第一条线索的物理学家，是在关于场方程的变换理论方面积累着迈向新概念的方法和技巧。准确地说，就是在寻找可以使电磁场方程保持变换中形式不变的式子——所谓的洛仑兹变换式。

最早推导出后来被称为洛仑兹变换式的是福特(Woldemar Voigt，1850-1919)[②]，时间是 1887 年，比洛仑兹得到同样的变换式要早 8 年[③]。值得注意的是，这个时期，很多物理学家所作的论著中，tensor 一词仍然是指向量的模，例如在克莱因（F.Klein，）和索莫菲（A.Sommerfeld，）1910 年合著的书"陀螺理论"[④]中，tensor 就是指四元数的模：

Ihre einfache Grundlage ist der mehrfach benutzte Satz, dafs der **Tensor** eines Quaternionproduktes gleich ist dem Produkt aus den Tensoren seiner Bestandteile, unter dem Tensor einer Quaternion

---

① William R.Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1899, p164.

② W Voigt, *"Ueber das Doppler'sche Princip"*, *Göttinger Nachrichten*, (1887) vol. 7, p41 51; Reprinted with additional comments by Voigt in *Physikalische Zeitschrift* XVI, p381-386 (1915).

③ 洛仑兹是在 1895 年的论文"麦克尔逊干涉实验"中，提出收缩假说的。

④ F.Klein A.Sommerfeld, *Theory des kreisels*, vol.4, Leipzig, 1910, p939.

$$Q = Ai + Bj + Ck + D$$

Die fruher auch als Streckung bezeichnete Grofse

$$T = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$$

verstanden.

之所以会这样，主要是因为 tensor 此时已经约定俗成，因此这个时候物理学家在探讨张量概念的时候，更多地是从算法上来研究。第一个用 tensor 指称张量的是诺德斯托姆（Nordstrom,G）,这在第三节讨论。

关于张量命名的问题，M. 克莱因的观点占主导地位，M.克莱因认为爱因斯坦是第一个在现代意义上使用 tensor 的人。他认为："这门学科变成通常所说的张量分析，那是在 1916 年爱因斯坦给他以这个名称之后。[①]" 这种说法是有问题的，首先，爱因斯坦和格罗兹曼第一次使用 tensor 是在 1913 年[②]，而不是 1916 年；再有，在这篇广义相对论的奠基之作中，格罗兹曼说："1912 年，科特勒的论文详细考察了特殊张量理论。"[③]也就是说，在格罗兹曼和爱因斯坦使用 tensor 指称"张量"之前，tensor 这个词已经不再指称向量的模，而已经具有现代意义了。我们已经讨论过，洛仑兹和明可夫斯基分别于 1904、1908 年触及到了张量概念，但都没有用 tensor 这个词；里奇 1900 年建立绝对微分学的总结性论文中，也没有用到 tensor, 而是表述为"协变系统"。这就使得本身已经很抽象的张量概念变得更加扑朔迷离。在第三节中，我们将从原始文献中发现第一个在现代意义上使用 tensor 的人。

[①] M. Kline, *Mathematical thought from to modern times*, vol.3, New York, Oxfoed university press, 1972, p1123.
[②]爱因斯坦 格罗兹曼，广义相对论纲要和引力论，《爱因斯坦文集》第二卷，1977 年，商务印书馆，p224.
[③]同上，p248.

第二节　电动力学中的张量概念

1　明可夫斯基的六元矢量：二阶反对称张量

在福特和索莫菲之后，物理学家对电磁场方程的协变性仍在努力探索，到爱因斯坦那里，这个问题基本被解决了。[①]但是爱因斯坦的狭义相对论在概念上没有突破向量分析的范畴，历史仍在等待新人的出现。在物理学中引进张量思想的是明可夫斯基——爱因斯坦大学时代的数学老师，时任格廷根大学的教授，他在1908年对爱因斯坦的狭义相对论进行了根本性重构，采用四维空间中的两类向量[②]来建立狭义相对论方程，第一次用张量概念表达 Maxwell-Lorentz 方程[③]，但是没有使用 tensor。

1908年，明科夫斯基发表《运动物体的电磁理论》[④]一文，引进了一种新的表达方式：

[①] 1905年6月，爱因斯坦的著名论文中借助高超的物理学思维，得到了洛仑兹变换式，以此为出发点，重建了完全协变的电磁场方程。爱因斯坦巧妙地设想：从k系的原点在时间 τ_0 发射一道光线，沿着X轴射向 x'，在 τ_1 时从那里反射回原点，在 τ_2 时到达。由此必定有：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau(0,0,0,t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v})\right]=\tau(x',0,0,t+\frac{x'}{V-v})$$

使 x' 为无限小，则有：

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v})\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

或者

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

因此：

$$\tau=a(t-\frac{v}{V^2-v^2}x')$$

那么新系中 x 的对应值 ξ 为：

$$\xi=a\frac{V^2}{V^2-v^2}x'$$

同样得到其他两式：$\eta=a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}y,\zeta=a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}z$

$$\tau=\beta(t-\frac{v}{V^2}x),$$

经过变换，得到：

$$\xi=\beta(x-vt),$$

$$\eta=y,$$

$$\zeta=z$$

爱因斯坦在这篇论文的第二部分，借助于刚刚推导出的变换公式，对麦克斯韦方程组的协变性进行了讨论，得到了完全协变的结果。

[②] 其中第二类向量就是具有张量内涵的量。

[③] 由于明可夫斯基没有找到具体的表达方式，所以只是概念性的认识。

[④] H Minkowski, *Die grundgleichungen fur die elektromagnetischen vorgange in bewegten korpern*(1908), in *Gesammelte abhandlungen von hermann minkowski*, 1911, p352-404.

设两个矩阵：

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pq}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{q1} & \cdots & b_{qr}\end{vmatrix}$$

求它们的积，得：

$$C=\begin{vmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \cdots & c_{pr}\end{vmatrix}$$

将其展开，得：

$$c_{hk}=a_{h1}b_{k1}+a_{h2}b_{2k}+\cdots+a_{hq}b_{qk}$$

这就是张量。明科夫斯基还在文中定义了四维二阶张量：

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

并给出缩略式：

$$\sum a_{hk}x_h x_k$$

这与凯莱等数学家的方法是一样的。尚不清楚明科夫斯基于凯莱等人有无直接的思想交流，也不清楚明科夫斯基是否间接地受到了数学家理论成果的启发。

明可夫斯基在《时间与空间》[①]一文中，对他的革命性思想作了说明。他首先定义了“世界点”：“我将把在某一时刻的一个空间点，即一组值 x,y,z,t，叫做一个世界点。”这其实就是黎曼几何学中的流形概念，只是在这里被赋予了清楚的物理意义。然后他指出：

在力学上，我们可以于 $t=0$ 时令 x, y, z 三个轴绕着原点做任何转动，这相当于表达式 $x^2+y^2+x^2$ 的齐次线性变换。那么，空间的正交条件与时间轴的完全自由选择之间的关联 $c^2t^2-x^2-y^2-z^2=1$，它的齐次变换使此曲面的新变量表达式保持原有形式，显然，空间绕原点旋转就属于这类变换。

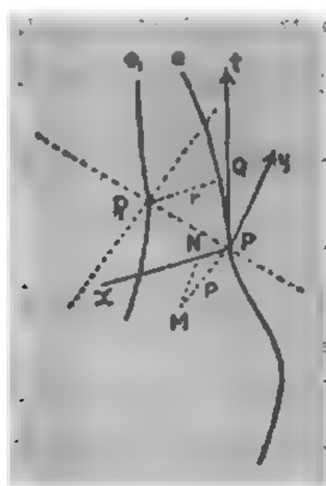
[①] H.Mimkowski, *Espace et Temps*, in *Annales ecole normale superieure*, 1909, Paris, p499-517.

经过这样的构造，明可夫斯基利用这个曲面图形合理解释了洛仑兹长度收缩假说，而无需借助神的力量了，这与爱因斯坦利用同时性的相对性所作出的解释是一致的，所不同的是明可夫斯基完全借助数学的力量，不再需要任何物理学假设。

接下来，明可夫斯基定义了 x,y,z,t 流形中的矢量（即数学中的向量）：流形中的一个有向长度。并区分了类时矢量和类空矢量。在文章的最后，明可夫斯基运用他的方法对电磁学中的协变性做出了合理解释。

最显著地说明世界假设的优越性的例子，或许就是按照麦克斯韦-洛仑兹理论来指出做某种运动的点电荷所产生的效应。我们想象一个电荷为 e 的电子的世界线，并引入从任何始点算起的原时 τ。为了找出在任一世界点 P_1 处电子所产生的长，我们作属于 P_1 的前锥。既然这世界线的方向处处都是类时矢量的方向，这锥显然与世界线交于一点 P。在 P 作世界线的切线，并通过 P_1 作这切线的法线，它沿 x, y, z 轴的分量代表在世界点 P 处 e 所激发的场的矢量乘以 c。

于是在电子所产生的场的描述中，我们看到，场被分为电力与磁力，对基本时间轴来说，这是一种相对的区分。**将两种力合起来描述的最清楚的方法是由力学中的偶单力组类推而得的。**



这句话表明明可夫斯基已经想到了用张量形式表达物理规律，这一点在索莫菲对该文的注释中可以得到辅证："用'第二类矢量'（我建议称之为'六元矢量'），以不变的方式表示电磁场是明可夫斯基关于电动力学的见解中一个特别重要的部分。六元矢量的引入是新东西，象六元矢量那样，力学的偶单力组依赖于六个独立

参数。"这种向量实质上就是现在的"反对称二阶张量"，只是，明可夫斯基没有，也不可能写出这是一个怎样的形式，原因是张量形式是在几何背景之下被数学家找到的。

据诺顿考证，明可夫斯基的四维时空概念在 1910 年被诺德斯托姆（Nordstrom）用来发展基于洛仑兹协变理论的引力理论[①]，诺德斯托姆理论的思想基础是四维时空中的四维力和四维速度的泊松方程。爱因斯坦受到了诺德斯托姆的深刻影响。

1910 年，明可夫斯基出版《几何计算》[②]一书，详细讨论了四维空间中的几何计算。明可夫斯基运用微积分的传统方法，利用两面夹定理，以不等式构造了新的分析方法。经过长篇的分析论述，明可夫斯基为二次形式的运算铺垫了基础，随后转入相关计算。

考虑二次形式：

$$\sum a_{hk}x_h x_k = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

$$\xi_h = \sqrt{d_h}(x_h + a_{h,h+1}x_{h+1} + \cdots + a_{hn}x_n), d_h = \frac{D_h}{D_{h-1}}$$

有：

$$x_h + a_{hk}x_k = 0$$

展开 x_h 有：

$$x_h = p_h^{(1)}v_1 + \cdots + p_h^{(n)}v_n$$

运用前面几章已经得到的结论，明可夫斯基得到二次形式系数的一个结论：

$$a_{11}\cdots a_{nn} \le \left(\frac{2^n\Gamma(1+\frac{n}{2})^2}{(\Gamma(\frac{1}{2}))^n}\right)D$$

这个结论比数学家得到的关于二次形式的结论要差很多，几乎没有什么用处，但是作为一种努力，物理学家凭借直觉，也在对二次形式进行研究，同样希望得到关于超越向量概念的数学量满足怎样的运算规则。

物理学家与数学家共同探讨同样的课题，在 19 世纪的时候表现得更加明显，但是在方法上仍然缺少沟通，彼此独立发展，浪费了许多时间和精力。这种现象在 20 世纪的时候得到了极大的改善，无论在表达语言，还是在协作方面，物理学家与数学家的沟通都更加协调，甚至在某些领域很难区分彼此的专业，比如弦理论就是这

[①] J.Norton, *Einstein, Nordstrom and the Early demise of scalar, Lorentz-Covariant theories of gravitation*, in *Archive for history of exact science*, 45: 1992, p17-94.
[②] H.Minkowski, *Geometrie der zahlen*, 1910, Leipzig, Berlin

样一个领域，顶级的数学家和物理学家彼此交换了身份来做这个题目，尽管他们仍然保持着其他的研究。

2　洛仑兹理论中的张量概念

洛仑兹作为十九世纪末伟大的物理学家，在数学的物理学应用方面造诣很深。事实上，洛仑兹已经在向量分析的基础上向前推进了相关的数学方法，在洛仑兹的理论中，四维的时空坐标系已经非常普遍地应用了，这比明可夫斯基的四维流形要早近十年。当我们打开十卷本的《洛仑兹文集》[①]，会感到洛仑兹高超的数学技巧，已经超越了他的物理学同辈。

1878 年，洛仑兹发表《论光速与媒质密度的关系》一文[②]，讨论了这样的问题：

设：$m_x = f_1(x,y,z,t), m_y = f_2(x,y,z,t), m_z = f_3(x,y,z,t)$ 表示一个空间实体，当以太被激发，则由于纬度变化使得空间中的 ξ,η,ζ，变换为 ξ',η',ζ'，则有：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{r}f_1\right]=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{1}{r}f_1\right]+\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}f_1\right]=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{1}{r}f_1\right]-\frac{\partial}{\partial\xi'}\left[\frac{1}{r}f_1\right]$$

我们从这个式子隐约可以看出张量分析中克里斯托弗符号的影子，尽管这两者是完全不同的两回事，但有一点是相同的，都是微分运算。

1892 年，洛仑兹发表《麦克斯韦电磁理论的应用》[③]，这篇论文中，出现了一个符号：

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} ds dt$$

来表示方程：

$$4\pi V^2\int(fl+bm+hn)ds=-\frac{d_1}{dt}\int H_n d\sigma$$

[①] H.A.Lorentz, Collected papers, vol. I–vol. IX, Martinus Nijhoff, 1935–1939.

[②] H.A.Lorentz, *Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media*, in Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, 18, 1878, p2-119.

[③] H.A.Lorentz, *La theorie electromagnetique de Maxwell son application aux corps mouvants*, in Arch. Neerl. 25, 1892, p164-321.

这种表示法等价于现在的双下标表示的张量符号。这样的表达方式还出现在1896年的论文《电磁场理论的定理和关于光的两个命题》[①]中：

$$\frac{1}{4\pi}\int(BE')d\tau+\int(F'G)d\tau=\frac{1}{4\pi}\int\begin{vmatrix}B_x & B_y & B_z\\ F_x & F_y & F_z\\ \lambda & \mu & \nu\end{vmatrix}d\sigma$$

这说明洛仑兹已经触摸到了用张量符号表达数学表达式的思想方法，尽管此时他并没有在概念上建立起张量数学的有关运算系统。

1899年，洛仑兹发表《电磁场中的坐标变换》[②]一文，洛仑兹写道：

对于函数：

$$T=\frac{1}{2}h(h+1)\frac{\rho}{a^2}p^2\int Y_h^2 d\omega\text{，}$$

$$U=\left[2\pi V^2\frac{h^2(h+1)^2}{2h+1}\frac{\sigma^2}{a^3}+\frac{1}{2}h(h+1)\frac{1}{a^2}k^2\right]p^2\int Y_h^2 d\omega$$

如果设：

$$A_h=\left[4\pi V^2\frac{h^2(h+1)^2}{2h+1}\frac{\sigma^2}{a^3}+h(h+1)\frac{1}{a^2}k^2\right]$$

$$B_h=h(h+1)\frac{\rho}{a^2}$$

则有：

$$T=\frac{1}{2}B_h p^2\int Y_h^2 d\omega$$

$$U=\frac{1}{2}A_h p^2\int Y_h^2 d\omega$$

展开两式：

$$U=a_{11}p_1^2+\cdots+a_{nn}p_n^2+a_{12}p_1p_2+a_{13}p_1p_3+\cdots$$

$$T=b_{11}p_1^2+\cdots+b_{nn}p_n^2+b_{12}p_1p_2+b_{13}p_1p_3+\cdots$$

其中：

$$a_{\mu\mu}=A_h\int Y_{h\mu}^2 d\omega\text{，}\quad a_{\mu\nu}=A_h\int Y_{h\mu}Y_{h\nu}d\omega$$

---

① H.A.Lorentz, *The theorem of poynting concerning the energy in the electromagnetic field and two general propositions concerning the propagation of light*. in Versl. Kon.Akad.Wetensch. Amsterdam. 4, 196, 1896.

② H.A.Lorentz, *Sur les vibrations de systemes portant des charges electriques et places dans un champ magnetique*, in Arch.Neerl. 2, 78, 1899.

$$b_{\mu\mu}=B_h\int Y_{h\mu}^2 d\omega\,,\quad b_{\mu\nu}=B_h\int Y_{h\mu}Y_{h\nu}d\omega$$

依据这个表达方式，洛仑兹写出了电势表达式：$Q_\mu=\sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu}p_\nu$。这样的结果与现代的张量表达是相同的。

洛仑兹在数学上持之以恒地推进电磁学向量理论，基于洛仑兹变换式的方法已成为当时重要的物理学思想方法。诺顿认为：洛仑兹协变理论是通向广义相对论的重要步骤[①]。爱因斯坦 1912 年的结论就是基于洛仑兹协变理论的，但是，这个理论违背了光速不变原理，这从一个侧面说明这样的理论是不可能得出正确结论的，必须依靠张量分析工具才能建立正确的引力场方程。

爱因斯坦在 1912 年发表了 3 篇关于引力论的论文，延续了劳厄、诺德斯托姆等人基于洛仑兹协变理论的思想方法，并以此建立引力理论。

1.《引力场中的光速及其静力学》[②]。这篇论文没有用到张量表达，只是得出了一个关系式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{-\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right\}$$

2.《引力场的静力学理论》[③]。这篇论文是对上一篇的延续，同样没有用到张量，结论是：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\dfrac{x}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{q^2}{c^2}}}\right\}=-\frac{\dfrac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\dfrac{q^2}{c^2}}}+\frac{R_x}{m}$$

3.《相对论和引力理论》[④]。这篇论文在思想上总结了前两篇论文，全文没有计算，表明此时的爱因斯坦对引力理论仍很茫然，没有找到解决问题的门径。下面我们仍然要讨论物理学家对张量概念产生的贡献，与数学家不同，物理学家的工作更多地是从客观的应用层面来发展张量概念的，而数学家则线条清楚地在微分几何领域建设着张量分析。

---

① J Norton, *Einstein, Nordstrom and the Early demise of scalar, Lorentz-Covariant theories of gravitation*, in *Archive for history of exact science*, 45: 1992, p17-94

② A.Einstein, *Lichtgeschwindigkeit und statik des gravitationsfeldes*, in *Annalen der physik*, 1912, vol.38, p355-369.

③ A.Einstein, *Zur theorie des statischen gravitationsfeldes*, in *Annalen der physik*, 1912, vol.39, p443-475.

④ A.Einstein, Relativitat und gravitation, in *Annalen der physik*, 1912, vol.40, p1059-1063.

第三节　tensor："张量"含义的首次出现

1. 诺德斯托姆赋予 tensor 张量内涵

经过非交换代数、内蕴微分几何、高维空间理论、电动力学四个领域的不懈探索，张量概念已经萌芽了。tensor 自哈密顿被用来指称"向量的模"之后，很长时间被沿用，这在第一节已经详细论述过了。tensor 用来指称张量最早出现在诺德斯托姆（Nordstrom）1910 年的论文[1]中；另一方面，关于张量的微分运算——绝对微分法，也在 1900 年在《数学年刊》由里奇公开发表。

简单梳理一下关于张量概念的较为复杂的发展线索：

1844 年凯莱建立矩阵代数，为向量的代数定义提供合适的语言；

1845 年格拉斯曼建立 n 维空间概念，提出"扩张量"概念；

1846 年哈密顿首次使用 tensor 指称向量的模；

1854 年黎曼传承高斯的内蕴几何思想，提出高维流行概念；

1896 年克里斯托弗建立协变微分算法，为曲线坐标系中的微分运算提供了算符；

1898 年里奇建立绝对微分法，综合了前人的工作，并用"协变系统"指称张量；

1907 年明可夫斯基提出四维时空流形，同时提出六维矢量——二阶反对称张量；

1910 年诺德斯托姆首次用 tensor 指称张量；

1913 年爱因斯坦和格罗斯曼系统使用张量分析，并定义了张量代数的若干性质。

之所以认定诺德斯托姆是最早使用现代意义上的 tensor 的人，理由如下：

1. 在对物理学家关于电动力学研究的原始文献仔细分析之后，有如下事实：1899 年福特最早得到洛仑兹变换的三篇文献中，没有用到张量概念以及 tensor 一词。虽然福特在 1898 年写了一本关于晶体物理学的书[2]，里面用到了 tensor，但是福特定义的是三个互相垂直的"tensor-tripel"（三元组），这与现代意义上的 tensor 是不同的。另一方面，1899 年，诺德斯托姆关于洛仑兹协变引力理论的文献[3]中，没有 tensor 一词；

2. 1910 年，索莫菲关于电磁理论的文献中仍然用 tensor 指称向量的模，这说明在诺德斯托姆之外，tensor 的意义并未通用；

3. 1911 年契维塔在与爱因斯坦的通信中仍然使用"协变系统"指称张量概念，

---

[1] G.Nordstrom, *Zur elektromagnetischen mechanik*, in *Physikalische Zeitschrift*, 1910, (5), p440-445.

[2] W.Voigt. Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung. Leipzig, 1898.

[3] G.Nordstrom, *Originalmitteilungen*, in *Physikalische Zeitschrift*, 1909, (2), p681-687.

这说明数学家没有注意到物理学家的工作。

因此，tensor 的辞源应当是在本章从原始文献中提炼出来的历史过程中产生的。下面说明诺德斯托姆的 1910 年论文中 tensor 的含义：

由相对论加速度变换式：

$$R'dv = \frac{d}{dt}\frac{mb}{\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}}}$$

可得：

$$R_x'dv = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta b_x}{\sqrt{1-q^2}}dv\right\} = \left\{div\frac{\delta b_x}{\sqrt{1-q^2}}b + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta b_x}{\sqrt{1-q^2}}\right\}dv$$

因此有：

$$R_x' = \frac{\partial}{\partial x}\delta\frac{b_x^2}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\delta\frac{b_x b_y}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\delta\frac{b_x b_z}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{b_x}{\sqrt{1-q^2}}$$

设：

$$a_x = \frac{b_x}{\sqrt{1-q^2}}, a_y = \frac{b_y}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$a_z = \frac{b_z}{\sqrt{1-q^2}}, a_u = \frac{ic}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$\gamma = \delta\sqrt{1-q^2}$$

则有：

$$R_x' = \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_x a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_x a_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_x a_u$$

$$R_y' = \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_y a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_y^2 + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_y a_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_y a_u$$

$$R_z' = \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_z a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_z a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_z^2 + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_z a_u$$

$$R_u' = \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_u a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_u a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_u a_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u^2$$

其中分量 $\gamma a_m a_n$ 称为四维张量的分量。

很明显，诺德斯托姆的 tensor 正是现代意义上的张量概念。1913 年，诺德斯托

姆又发表了两篇论文，继续阐述他的张量概念。一篇是《相对论力学中的惯性和有重质量》[1]，另一篇是《相对论质点引力理论》[2]。

诺德斯托姆为了得到新的引力理论，定义了四维张量 T：

Nun fassen wir den vierdimensionalen **tensor** T als die summe zweier solcher tensoren auf, indem wir setzen

$$\begin{cases} T_{xx} = p_{xx} + v\dfrac{b_x}{\sqrt{1-q^2}} \\ \cdots \\ T_{uu} = p_{uu} + v\dfrac{ic}{\sqrt{1-q^2}} \\ T_{xy} = p_{xy} + v\dfrac{b_x}{\sqrt{1-q^2}}\dfrac{b_y}{\sqrt{1-q^2}} \\ \cdots \\ T_{zu} = p_{zu} + v\dfrac{b_z}{\sqrt{1-q^2}}\dfrac{b_y}{\sqrt{1-q^2}} \end{cases}$$

经过长篇的运算，诺德斯托姆得到了引力分量：

$$\begin{cases} G_{xx} = \dfrac{1}{2}\left\{(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x})^2 - (\dfrac{\partial\Phi}{\partial y})^2 - (\dfrac{\partial\Phi}{\partial z})^2 - (\dfrac{\partial\Phi}{\partial u})^2\right\} \\ \cdots \\ G_{uu} = \dfrac{1}{2}\left\{-(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x})^2 - (\dfrac{\partial\Phi}{\partial y})^2 - (\dfrac{\partial\Phi}{\partial z})^2 + (\dfrac{\partial\Phi}{\partial u})^2\right\} \\ G_{xy} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \cdots \\ G_{zu} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} \end{cases}$$

在此基础上，诺德斯托姆得到：

$$\int g(\Phi)v\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dv = \frac{d}{du}\int\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1'}{\partial u}dv$$

应当承认，诺德斯托姆的张量理论已经得到了基本上成功的结论，只是物理学

[1] G.Nordstrom, *Trage und schwere masse in der relativitats-mechanik*, in *Annalen der physik*, 1913, vol.40, p856-878.
[2] G.Nordstrom, *Zur theorie der gravitation vom standpunkt des relativitatsprinzips*, In *Annalen der physik*, 1913, vol.42, p533-554.

家没有意识到引进弯曲坐标系的必要性，因此尚未完全成功。前面我们已经谈到，在十九世纪末、二十世纪初的十多年当中，数学家对张量数学的贡献主要在微分几何方面，物理学家则集中于四维时空流形中的协变理论。粗略地讲，数学家致力于建立协变微分运算方法，物理学家致力于电动力学协变性的研究，因而物理学家更有可能想到用 tensor 表达张量概念。

2 劳厄的张量概念

劳厄(Max Von Laue，1879-1960)于 1911 年发表《相对论动力学》[①]，对物理学方向上发展出的张量概念作了总结性陈述，并使用 tensor 指称张量。在劳厄的论文中，我们再次发现了印证 tensor 起源于电磁学的证据。表面上看，劳厄是从弹性力学引出 tensor 的，但是，当我们对 1905 年到 1912 年这个时间段里关于弹性力学的专业著作进行分析之后，发现这个时期的弹性力学还没有使用张量数学方法。比如：1906 年出版的 *An Investigation into the Elastic Constants of Rocks, More Especially with Reference to Cubic Compressibility*；1905年出版的*The mechanics of engineering*, vol.I *Kinematics, statics, kinetics, statics of rigid bodies and of elastic solids*；1910年出版的 *Mechanics of internal work in elastic bodies and systems in equilibrium including*。这些弹性力学的专著都没有使用张量数学方法。我们具体来看劳厄的张量概念的思想内涵：

劳厄写道：

在传统的弹性理论中，拉力是用对称张量（tensor symmetrischen[②]）P 表示的：

$$\begin{matrix} P_{xx}, & P_{xy}, & P_{xz}, \\ P_{yx}, & P_{yy}, & P_{yz}, \\ P_{zx}, & P_{zy}, & P_{zz}, \end{matrix}$$

若考虑洛仑兹变换，则有：

① M Laue, *Zur dynamik der relativitatstheorie*, in *Annalen der physik*, vol.35, p524-542.
② 劳厄原文中的名词。

$$P_{yy} = P_{yy}^0$$

$$P_{yz} = P_{yz}^0$$

$$P_{xx} = \frac{c^2 P_{xx}^0 + q^2 W^0}{c^2 - q^2}$$

$$P_{xy} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} P_{xy}^0$$

从这里可以清楚地看到，1911 年，也就是诺德斯托姆提出 tensor 一年之后，劳厄准确地表达了张量概念。需要特别指出的是，劳厄并非是从（弹性）力学中引申出张量概念的。究其原因，除了前面提到的关于弹性力学史方面的理由之外，重要的线索在劳厄这篇论文的参考文献中。劳厄共引用了 11 篇参考文献，分别是：爱因斯坦（1905）、普朗克（1906）、波恩（1909）、洛仑兹（1904）、福特（1904）、明科夫斯基（1908）、索莫菲（1910）、彭加勒（1906）等 8 人关于电动力学方面的论文。这很清楚地表明，即使劳厄将张量用到了弹性力学中，也是在受到电磁学领域关于张量数学内容的启发而实现的。

劳厄的参考文献中没有诺德斯托姆 1910 年的论文，这很可能表明劳厄是独立得到张量表达的。在那个时代，科学家之间缺乏沟通的例子是非常多的，前面说过，F. 克莱因在 1910 年的时候还在用 tensor 指“向量的模”。因此，tensor 的电磁学起源的证据就增加到三个：哈密顿构词是从电磁学出发；诺德斯托姆是从电动力学领域赋予 tensor 以张量意义；劳厄同样是从电动力学得到 tensor.

至此，tensor 终于形成了。它经历了从电磁学的向量理论到洛仑兹协变理论的过渡，最终脱胎于电动力学的协变理论。

第四章　协变微分：张量分析的建立

笛卡儿的解析几何与牛顿、莱不尼兹的微积分，已被扩张到罗巴切夫斯基、高斯、黎曼和西尔维斯特的奇异的数学方法中（这种扩张比哲学史上所记载的任何一门学科的扩张更大胆）。事实上，数学不仅是各门学科所必不可少的工具，而且它从不顾及直观感觉的约束而自由地飞翔着。历史地看，数学还从没有象今天那样表现出对于纯粹推理的至高无上。

—— Butler，Nicholas Murray

爱因斯坦曾说，张量分析是由黎曼、里奇和列维－契维塔解决了的、与高斯曲面理论有关的、第一次系统使用广义坐标系的协变理论。自从高斯提出他的基于二维内蕴几何的曲面理论以后，数学家就自然要把它推广到三维甚至更高维的空间中去，但是此时将会使曲率函数变得非常复杂。事实上，即使是高斯在二维情形推导出的全曲率也是多达 15 项的很复杂的表达式，而当维数大于二时，曲率已不能用一个函数表达了。这个难题被黎曼以天才的构想改变了问题的角度，他将此归结为一个猜想，把线元设为$\sum g_{ij}dx^i dy^j$，这样一来，极大地简化了表达式。但问题是，在这样的空间中，曲率取什么样的形式？黎曼本人给出了一个表达式（见本章第一节），这启发克里斯托弗基本解决了曲率张量的表示，以及曲线坐标系中的微分问题，成为里奇和契维塔的理论基础。

需要指出的是，在黎曼提出空间的度量形式之后，尽管他本人给出了非常类似于克里斯托弗的曲率张量表达式，但是人们暂时还不清楚在这样的空间中，几何学将会采取什么样的形式。数学家的策略是从探索这个 n 维弯曲空间中的微分不变量开始，来研究广义空间中的变换公式。这方面的工作由贝尔特拉米首先开始，并为克里斯托弗的研究开辟了一个起点：局部变换等价问题。这个问题的答案就是所谓协变微分方法的建立。

第一节　微分形式不变量：张量分析的灵魂

微分形式不变量理论的基础是代数形式不变量理论，这个问题的提出是由于黎曼设想了一种度量形式是一个二次微分形式的高维弯曲空间，贝尔特拉米最早对此进行了研究。贝尔特拉米(Eugenio Beltrami，1835-1899)早期研究解析几何和测地学，在这个基础上转向了非欧几何的研究，并因此而专注于微分形式不变量的研究。早期由凯莱开创的不变量理论是对代数形式的研究，由于黎曼引进一般空间的微分度量形式，必然提出了微分形式不变量研究的课题，因为微分几何学就是要找到不依赖坐标系而独立存在的固有性质。贝尔特拉米是第一个发表相关研究的数学家。

贝尔特拉米 (Beltrami，Eugenio，1835－1899，意大利) 1853 年就读于帕维亚(Pavia)大学学习数学，这是意大利的著名学府之一，G. 卡尔达诺、G. 萨凯里(Saccheri)、L. 马斯凯罗尼(Mascheroni)等数学名家曾在此学习或执教。

1861 年贝尔特拉米在波伦亚(Bologna)受聘为代数和解析几何候补教员，第二年正式执教于波伦亚大学，同时担任了公共教育代理人及评议员。1864 年转教于比萨大学，任测地学教授，1866 年返回波伦亚大学任理论力学教授。在比萨时与数学家贝蒂(E. Betti)成为好友，在波伦亚又与擅长几何研究的克雷莫纳(A. L. Cremona)共事，由此开始了他数学创造的辉煌时期，其声望与日俱增。1870 年罗马成为意大利首都，新扩建的罗马大学立即聘请贝尔特拉米为该校理论力学教授，但他直到 1873 年才赴任，同年当选为国家科学院院士。1876 年又回到母校帕维亚大学任数学物理教授，同时讲授高等力学。1891 年再去罗马大学执教，1899 年在他担任国家科学院院长，当年卒于罗马。[①]

贝尔特拉米最著名的工作是发现非欧几何模型。1868 年，贝尔特拉米在《数学杂志》第 6 期上发表了他最重要的数学著作“论非欧几何学的解释”，系统总结了他这几年在微分几何学中的成果，并用它们来建立非欧几何的模型。贝尔特拉米这篇论著的发表是非欧几何发展史上的一个里程碑，其主要结论是：如果非欧几何中有矛盾，这种矛盾也将在曲面的欧氏几何中出现。它从理论上消除了人们对非欧几何的误解。他在曲面上给出双曲几何的有限表示法，证明了只要把曲面上的测地线

[①] 引自 Dictionary of scientific biography, vol.5, 1975, New York, Charles scribner's sons.

看作直线，双曲平面有限部分的几何在负的常曲率的曲面上成立，曲面上的长度和角度就是欧氏曲面上的长度和角度。对一个这样的曲面，贝尔特拉米称之为“伪球面”，它是由一条名为曳物线的曲线绕渐近线旋转而成的，这是非欧几何平面有限部分的模型。贝尔特拉米使得非欧几何从虚幻中走了出来，成为眼见为实的几何。[①]

贝尔特拉米在《非欧几何解释的尝试》[②]一文中，以内蕴几何为基础，给出了罗巴切夫斯基几何在常曲率曲面上的几何解释。贝尔特拉米用现在称为“贝尔特拉米坐标”的方法进行阐释：

设：$u = ax \backslash z, v = ay \backslash z$

即：$u = a\tanh\dfrac{\rho}{q}\cos\varphi, v = a\tanh\dfrac{\rho}{q}\sin\varphi$

很明显，$u^2 + v^2 = a^2\tanh^2\dfrac{\rho}{q} < a^2$

因此：$\rho = q\,\mathrm{arctan}\,h\dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{a}$

或：$\rho = \dfrac{q}{2}\ln\dfrac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}}$

这样形成的曲面被称为伪球面。在这种球面上可以实现罗巴切夫斯基几何的所有性质。如贝尔特拉米在这篇论文中所说：

如果我们用字母 x, y 表示辅助平面上的点的直角坐标，那么方程 $u = x, v = y$ 就决定了我们所要寻找的表示。它代表了半径为 a 的圆的内部区域，我们称之为有限圆。有限圆的弦表示曲面的测地线，特别地，坐标轴的平行线与测地线相应。

贝尔特拉米在非欧几何方面的工作为人所熟知，由于他的工作，非欧几何从抽象的概念中走出来，人们第一次“直观地”感受到了与我们日常所见完全不同的非欧几何“模型”。但是，贝尔特拉米对张量分析的贡献却不是他提出的非欧几何模型，而是他对微分形式不变量的研究。

---

① 吴文俊. 世界著名数学家传记. 科学出版社, 2003, p1062.

② E. Beltrami, *Saggio di interperetrazione della geometria non euclidea*, 1868, in *Opere matematiche*, vol.1, Napoli, 1902, p374-405.

贝尔特拉米从 1862 年就开始研究曲线的微分几何。1864 年他在《数学杂志》上发表文章《分析应用于几何的研究》[1]，在这篇论文中，贝尔特拉米第一个对曲面论的不变量作了研究，给出了具有几何意义的两个微分不变量，这是微分不变量方法研究的开端。实际上，贝尔特拉米的非欧几何模型是在微分不变量研究的基础上得到的。贝尔特拉米在 1864 年论文中写道：

考虑三维空间中的双曲率线性系统：

$$\xi=\xi(t,u,v),\quad \eta=\eta(t,u,v),\quad \zeta=\zeta(t,u,v)$$

微分之后得到：

$$\begin{cases} d\xi=\dfrac{\partial\xi}{\partial t}dt+\dfrac{\partial\xi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\xi}{\partial v}dv \\ d\eta=\dfrac{\partial\eta}{\partial t}dt+\dfrac{\partial\eta}{\partial u}du+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}dv \\ d\zeta=\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}dt+\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}du+\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}dv \end{cases}$$

将此结果应用于曲面第一基本形式，得：

$$(E\frac{\partial\phi}{\partial v}-F\frac{\partial\phi}{\partial u})\delta u+(F\frac{\partial\phi}{\partial v}-G\frac{\partial\phi}{\partial u})\delta v=0$$

经过计算，贝尔特拉米得到：

$$\frac{E(\frac{\partial\phi}{\partial v})^2-2F\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}+G(\frac{\partial\phi}{\partial u})^2}{EG-F^2}=f(\phi)$$

为了得到关于曲率的有关结果，贝尔特拉米开始考虑微分形式：

$$f(u,v,E,F,G,\frac{\partial E}{\partial v},\frac{\partial E}{\partial u},\cdots)$$

在变换为：$f(u'+a,v'+b,E',F',G',\frac{\partial E'}{\partial v'},\frac{\partial E'}{\partial u'},\cdots)$ 的时候哪些量保持不变。贝尔特拉米的研究虽然是从高斯的理论开始的，但是同时也为解决黎曼的度量形式的有关性质提供了思路和方法。

当贝尔特拉米读到由戴德金 1867 年整理出版的黎曼文集里《关于几何基础的假设》一文后，其中的流形概念对他有很大启发。1868 年，贝尔特拉米在《数学年刊》上发表文章《常曲率空间的理论基础》[2]，将他关于非欧几何的表述扩展到 n>2 的

[1] E.Beltrami, *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, in *Giornale di Matematiche*. 1864, vol.2, p107-198.
[2] E.Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, , in *Annali di matematica pura applicata*, 1868, serie II, p232-255.

流形中，并研究了某些特殊的伪球面，得到高维非欧几何学的一些结果。他的工作使得自1733年萨凯里(G. Saccheri)开始的关于非欧几何的研究得到了科学的解释。

《常曲率空间的理论基础》中，贝尔特拉米从一个基本的事实出发：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+\cdots y_n^2,$$

得到：$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\cdots+dx_n^2=dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2+\cdots dy_n^2$，

因此有：$\dfrac{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}{x^2}=\dfrac{dy_1^2+dy_2^2+\cdots dy_n^2}{y^2}$

利用他在非欧几何方面的论文中得出的结论：$y_r=\dfrac{r}{2}\log\dfrac{\sqrt{y^2+y_r^2}+y_r^2}{\sqrt{y^2+y_r^2}-y_r^2}$

他导出了曲线坐标系中的线素表达式：

$$ds^2=d\rho^2+(R\cdot senh\frac{\rho}{R})^2d\Lambda^2$$

随后，经过运算，贝尔特拉米得到了一个公式：

$$ds^2=d\rho^2+k'^2e^{-\frac{2\rho}{R}}d\eta^2$$

这是最早的对曲线坐标系中的几何量所作的计算，贝尔特拉米在这里没有得到他在这篇论文的题目中所期望得到的曲率公式，但是他开创了二次微分形式不变量的研究，这成为克里斯托弗工作的基础，到了克里斯托弗那里，张量分析的基本内容就被构造出来了。

这里需要说明：张量这个概念及其演算是在不同的方向上发展出来的，从电磁学和向量的矩阵理论的角度得到的张量的定义是清楚明了的，在形式上可以和向量直接类比；而从微分几何方向形成的张量概念是从一个被称为克里斯托弗符号得出的，而这个符号本身却不是张量。

整个张量数学就是在代数和几何两个领域的彼此独立而又相互交织的过程中，逐渐发展起来的。其中微分几何学方向的过程从黎曼开始（1854年），经过贝尔特拉米、克里斯托弗，到里奇（1892年）基本建立起来，历时38年，这是张量数学的核心内容。张量概念的定义则是从电磁学及向量的代数定义中形成的，其中有很多的数学家和物理学家对此做出了贡献。

第二节　克里斯托弗符号：张量分析出现

> Christoffel 引进的这两个概念的重要意义至少在于：帮助建立曲率张量和协变微分概念；使得 Ricci 可以借助他的工作发展出绝对微分学；使得 Einstein 在物理学中构造张量分析方法。
>
> ——Butzer

埃尔温·布鲁诺·克里斯托弗（Elwin Bruno Christoffel，1829—1900 年）的学术生涯开始于数值分析，这为他以后对代数形式、微分形式的研究打下了基础。1858 年，克里斯托弗发表了他最初的两篇论文，讨论数值积分[①]，发展了高斯的二次型的方法，并且把多项式表达成行列式，现在称之为克里斯托弗定理。此后，克里斯托弗在正交多项式、连分数理论、不变量理论、共形映射等方面进行研究，他得到了被一个圆上的多边形限制的单连通区域的共形映射[②]，显示出他在微分几何领域的才华。[③]

克里斯托弗对数学做出了许多重要的贡献，在微分方程、张量分析、不变量理论等数学物理领域成绩卓著。他的化归定理解决了二次微分形式的局部等价问题，他在微分几何学中引入协变微分法及第一类和第二类克里斯托弗符号，这些工作成为后来张量演算的基础。

克里斯托弗对不变量理论有着深厚的兴趣，在他的手中，不变量理论最终成为张量分析的源头，从这里，克里斯托弗找到的两类克里斯托弗符号建立起了协变微分的计算方法，这种方法经过里奇的发展，演化出了张量算法。如果没有克里斯托弗的方法，黎曼几何将停留在概念阶段，无法找到算法，广义相对论也就根本不会出现了。

克里斯托弗作为 19 世纪重要的数学家，是衔接凯莱、希尔维斯特、贝尔特拉米和里奇、契维塔这两代数学家的关键人物，并被认为是黎曼的最重要的继承者。究其原因，是因为他对微分形式的研究成果，导致了协变微分方法的发现。所谓协变微分，是指在曲线坐标系中对函数的微分运算，“协变”顾名思义就是随着坐标系变

[①] E.B.Christoffel, *Uber die Gaussische quardratur und eine verallgemeinerung derselben*, in *Journal fur die reine und angewandte mathematik*, 55(1858), p61-82.
E.B.Christoffel, *Uber die lineareabhangigkeit von functionen einer einzigen veranderlichen*, in *Journal fur die reine und angewandte mathematik*, 55(1858), p281-299.

[②] E.B.Christoffel, *Allgemeine theorie der geodatischen dreiecke*, in *Mathematisch-physikalische Abhandlungen*, Berlin, 1868, p119-176.

[③] 引自 Dictionary of scientific biography, vol.5, 1975, New York, Charles scribner's sons.

化。由于曲线坐标轴每个点的方向都不同，因而切线方向就不同，所以基向量随点而变化，这样一来，计算微分就变得很复杂，协变微分就是为了解决这个问题而提出的。

克里斯托弗直接继承了黎曼的思想，所不同的是，克里斯托弗虽然和黎曼一样是从二次微分形式开始的，但是他不是计算流形的曲率，而是考虑局部等价问题（the local equivalence problem）导出了协变微分公式[1]。克里斯托弗在 1869 年发表 *Ueber die transformation der homogenen differentialausdrucke zweiten grades*[2]一文，开始研究 Christoffel 符号，这篇论文的主要内容是：

考虑两个 n 变量实二次微分形式[3]

$$g = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \ , \qquad \dddot{g} = \dddot{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma)d\ddot{x}^\alpha \, d x^\beta$$

在什么条件下可以互相变换。

克里斯托弗的结论是：需要满足下列微分方程

$$x^a_{\alpha} = X^a_{\alpha},$$

$$X^a_{\alpha,\beta} = \dddot{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^a_{bc} X^b_{\alpha} X^c_{\beta}$$

这说明等价变换是由一个点的初始值决定的。论文中克里斯托弗引进了曲率张量的分量 R^a_{bcd}, R_{abcd}，并且建立了曲率张量（这里借用当时还未出现的名辞）方程

$$R_{abcd;e_1\cdots e_k} X^a_{\alpha}\cdots X^{e_k}_{\alpha_k} = \overline{R_{\alpha\beta\gamma\delta;\alpha_1\cdots\alpha_k}}$$

这里出现的克里斯托弗符号（Christoffel symbols），这个符号是为了进行协变导数的运算而引进的。协变导数表达为基向量的线性组合，其分量是 $\Gamma^k e_k$，其中的系数 Γ^k_{ij} 称为克里斯托弗符号，这个符号建立了“扭曲”了坐标轴的坐标系中表达微分运算的公式。

具体来说，克里斯托弗找到了曲线坐标系中的微分方法，由于曲线坐标系中的基向量是一个张量形式的函数，所以克里斯托弗的结果实际上是对流形中的向量进行微分的方法，也就是修正了普通偏微分运算。普通偏微分对张量施行运算之后将使得到的结果不再是张量，而克里斯托弗的协变微分方法保证了张量性质不变。

为了更清楚地展现张量在微分几何学中含义，我们仔细分析一下克里斯托弗的

---

[1] Covariant differentiation 这个词是 Gregorio Ricci-Curbastro 引进的。

[2] E. B. Christoffel , *Ueber die transformation der homogenen differentialausdrucke zweiten grades*, J. Reine Angew. Math. 70 (1869) , p46－70.

[3] 从这里我们看到 Christoffel 已经掌握了对偶空间概念，对一个量作了协变分量和逆变分量的区分。

协变微分。协变微分实际上是流形上向量的微分。众所周知，笛卡尔空间中对向量的微分就是所谓方向导数，很自然，普通的方向导数满足基向量的偏微分为零。但此时向量处在了流形上，这个性质不再成立了。这也是很自然的，因为此时坐标轴是一条曲线，它的切向量一定存在。因此说，既然基向量的导数不再为零，那么流形中向量的微分必然包括两个部分：向量的导数和坐标轴的导数，克里斯托弗（包括黎曼和贝尔特拉米）要解决的问题就是要找到包含这两项的微分表达式。

如何来解决呢？克里斯托弗仔细分析了向量在笛卡尔空间中的方向导数，他发现如果把标架向量改为该点的切标架向量，那么偏导数可以直接推广到黎曼空间中，正是从这里导向了他的黎曼空间中的微分运算。事实上，这种所谓“协变微分”的运算在 1917 年被契维塔发展成“平行移动”的概念，以至后来外尔提出“联络”概念，构架了现代黎曼几何的基本概念系统。

克里斯托弗认为，在曲面上一点，不共面的向量对于曲线坐标的基的偏导矢可以写成：

$$r_{\alpha\beta}=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}r_{\lambda}+a_{\alpha\beta}n$$

系数$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$表示求导的结果，为了求出它，引进记号：

$$g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$$

由于：

$$r_{\mu}r_{\alpha\beta}=g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$$

结合上式，有：

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=g^{\mu\nu}g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}=\delta^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$$

问题转化为求$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$。这两个符号就是所谓克里斯托弗符号。

合并已有结果，得到：

$$r_{\mu}r_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\mu}$$

因此：

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\mu}}=\frac{\partial(r_{\alpha}r_{\beta})}{\partial u^{\mu}}=r_{\alpha\mu}r_{\beta}+r_{\alpha}r_{\beta\mu}=\Gamma_{\alpha\mu\beta}+\Gamma_{\beta\mu\alpha}$$

有对称性，得另外两式：

$$\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^{\alpha}}=\Gamma_{\beta\alpha\mu}+\Gamma_{\mu\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma_{\mu\beta\alpha}+\Gamma_{\alpha\beta\mu}$$

联立三式，得：

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\mu}})$$

从而：

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}=\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\mu}})$$

这样，两类克里斯托弗符号就被求出来了，协变微分运算成为现实。这些结果为里奇建立绝对微分法准备了必要的前提，非欧几何的可计算阶段已经成为现实，黎曼几何也已经成形了。“Christoffel 引进的这两个概念的重要意义至少在于：帮助建立曲率张量和协变微分概念；使得 Ricci 可以借助他的工作发展出绝对微分学；使得 Einstein 在物理学中构造张量分析方法。”[①]

[①] P. L. Butzer， *E. B. Christoffel. The influence of his work on mathematics and the physical science*. Boston, Stuttgart 1981, p13－14.

第三节　里奇综合：张量分析的最终建立

各种非欧几何在 Lobachevski，Cayley，Beltrami 以及许多其他人之后的发展，已经显示出平行假设的变化。而 Riemann 打开的建立在微分形式之上的方法，以及 Chritoffel 建立的新概念，到了 Ricci 那里，完成了曲线微分方法的总结性工作。

——Goolige

张量分析经过内蕴几何、向量分析、矩阵理论、高维空间、n 维流形、协变微分等概念系统和数学方法的相继出现而最终建立起来，这最后的一步由里奇完成。

里奇（Ricci-Curbastro，Gregorio，1853-1925，意大利）是张量分析创始人之一。1869～1872 年就学于罗马大学、博洛尼亚大学，后转至比萨高等师范学校，1875 年获博士学位。1877-1878 年在慕尼黑学术访问。1880 年以后在帕多瓦大学任数学物理教授。1896 年发表了内蕴几何学的论文，使用了绝对微分学，进而提出缩约张量（里奇张量）的概念，以后成为理论物理的重要工具。1900-1911 年里奇和他的学生列维-契维塔进一步推动了这一学科的发展，直到爱因斯坦在广义相对论中使用了里奇理论之后，张量分析才受到普遍的重视。[①]

里奇的数学研究开始于线性微分方程，接着，又对超几何函数、电动力学等领域的问题进行了研究。这个时期，里奇工作的重点集中在数学物理方面，尤其是电路中的微分方程问题。后来，里奇的研究领域转向了微分几何，他在这个领域的突出贡献是在 1884-1894 的十年间，创造了曲线坐标系中的绝对微分法。我们在前面的论述中已经论述过曲线坐标系中的微分问题所经历的过程，这个过程是从高斯到黎曼，再到克里斯托弗的发展过程：高斯将坐标系从外围的笛卡尔坐标移到了曲面上，把坐标轴弄弯了，但局限在二维情形；黎曼把这种弯曲了的坐标系推广到了 n 维的情形；克里斯托弗在这种 n 维弯曲坐标系中引进了协变微分和两类克里斯托弗符号，里奇的出现，扮演了终结者的角色，他将协变微分用于高维弯曲空间中的几何学，包括曲面和运动群理论，发展出张量分析[②]的数学方法，在真正意义上建立起黎曼几何学，为广义相对论创造了数学工具。

里奇从 1884 年到 1898 年共发表了 9 篇论文[③]，奠基了张量分析的基本概念。综

[①] 引自 Dictionary of scientific biography. vol.5, 1975, New York, Charles scribner's sons

[②] 在这篇论文中，没有出现"tensor"这个词，论文中采用"协变系统"（Systemes covariants）这个词。

[③] *Principi di una teorie delle forme differenziali quadratiche (1884)；Sur parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali (1886)；Delle derivazioni covarianti e controvarianti (1888)；Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville (1894)；Sulla teoria degli iperspazi, Rendeconti della academia dei Lincei (1895)；Sui*

合这几篇论文的内容，里奇在 1898 年以前所掌握的计算工具和思考方法包括这样几个方面：

（一）变量变换的不变量

里奇得到如下定理：如果 $f_1,\cdots,f_n$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 f 的导数，则有：

$$f_i' = f_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

在现代教科书中，这个定理作为曲线坐标系基向量的变换规则出现。

（二）发展一般协变思想

这个思想是张量分析的主要代数特征。Ricci 考察这样的函数：$f = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ 或系数是独立变量的二次微分形式的函数：$f = a_{ij} dx^i dx^j$，它们的变换：$B^i \frac{\partial f}{\partial y^i}$，及 $b_{ij} dy^i dy^j$ 的系数满足：$B^i = A^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$，$b_{ij} = a_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \frac{\partial x^l}{\partial y_j}$。

里奇的结果是一般坐标系坐标变换分量表达的正确形式。

（三）定义协变系统（即现在的协变张量）

里奇给出了协变系统的定义：给定函数集 $X_{i_1\cdots i_m}, 1 \le i_1,\cdots,i_m \le n$，则协变系统的变换规则 $x \to T(x) = y$ 具有形式：$Y_{i_1\cdots i_m} = X_{j_1\cdots j_m} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_m}}{\partial y^{i_m}}$

（四）建立协变微分方法

里奇发展了 Christoffel 的方法。设基本度量张量：$\varphi = g_{ij} dx^i dx^j$，

置：$\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix} = g^{jl} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right)$

再设：$X_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$

则一阶张量的协变导数是：$X_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} X_k$

---

parameter e gli invariante delle forme quadratiche differenziali (1896)；Dei systemi di congruenze ortogonali in una varieta qualunque (1896)；Del teorema di stokes in uno spazio qualunque a tredimensioni e in coordinate generali (1897)；Lezioni sulla teoria delle superficie (1898)

二阶张量的协变导数是：$X_{ij,k}=\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k}-\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}X_{lj}-\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix}X_{il}$

（五）计算 Riemann 曲率张量

设基本度量张量：$\varphi=g_{ij}dx^i dx^j$，

则：$R^l_{ijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} m \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ mj \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} m \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ mk \end{Bmatrix}$，这个混合张量即 Riemann 曲率张量。

1901 年，里奇和他的学生列维—契维塔合写了《绝对微分学及其应用》[1]，总结了里奇在这个领域的成果，成为张量分析的经典著作。列维-契维塔（Tullio Levi-Civita，1873-1941）的早期数学工作是数学物理中的场论[2]，后来他和里奇合作研究绝对不变量，这成为他的张量分析应用研究的开端。契维塔潜心于纯数学研究，他的所谓应用研究是应用于其他数学分支，而很少应用于实际。他晚年研究 n 体问题，并把这个问题与相对论结合起来，主要的成果是：推导出 n 个质点的运动方程，讨论了爱因斯坦近似的有限尺度内物体的内部组成。契维塔最重要的工作是在里奇研究工作的基础上，对张量分析作了重要扩展。契维塔的代表作"动力方程变换"[3]就是论述绝对微分法应用的。

列维-契维塔(Levi-Civita，Tullio，1873~1941，意大利)在帕多瓦的中学是一名很出色的学生，1890 年进入帕多瓦大学数学院学习，师从 C．G．里奇(Ricci)，后来，他们合作创立了绝对微分学。1894 年他从该校毕业，次年任帕维亚科学院附属师范学院助教。1897—1918 年在帕多瓦大学教授理论力学，1898 年任该校讲师，1902 年任该校教授。这一时期是他取得科学成就的主要时期。1918 年受聘为罗马大学高等分析教授，两年后又受聘为该校理论力学教授，直到 1938 年因法西斯种族主义政策而被迫离职，三年后卒于罗马。列维-契维塔的科学兴趣很广泛，研究领域涉及张量分析、分析力学、天体力学、流体动力学、弹性力学、电磁学和原子物理学。[4]

《绝对微分学及其应用》不仅给出了这一算法的综合论述，而且还用这一独特算法给出在黎曼弯曲空间下的几何性质和物理规律的表示。里奇以及契维塔在这篇

---

[1] G. Ricci, *Méthodes de calcul différentielabsolus et leurs applications*, Mathematische Annalen,54(1901), p128—201.

[2] Pietro Nastasi and Rossana Tazzioli, *Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873-1941)*, in *Historia Mathematica* ,Vol. 32, Issue 2, May 2005, p203-236.

[3] Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche，1896.

[4] P.Nastasi, *Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita(1873-1941)*. Historia mathematica, 32(2005), p203-236.

长达 70 多页的论文中，从函数系统的变换、反变量的协变系统（里奇对张量的定义）、在向量分析中的应用开始，对张量概念进行了定义，并系统阐述了曲线坐标系中微分方法。然后论证了张量算法在几何学和力学中的应用。由于绝对微分学研究协变的关系，即从一个坐标系变到另一个坐标系后仍然保持不变的关系，这一特征使绝对微分学成为爱因斯坦广义相对论的有效的数学工具。"各种非欧几何在 Lobachevski, Cayley, Beltrami 以及许多其他人之后的发展，已经显示出平行假设的变化。而 Riemann 打开的建立在微分形式之上的方法，以及 Christoffel 建立的新概念，到了 Ricci 那里，完成了曲线微分方法的总结性工作。"[①]

在《绝对微分学及其应用》一文中，首先定义了"共变向量"和"逆变向量"，分别为：

$$\bar{\lambda}^{i} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{j}} \lambda^{j}, \bar{\mu}_{i} = \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{i}} \mu_{j}$$

接着讨论了对称张量、张量的缩并，以及变换法则。有了这些概念上的准备，里奇回到了线素的二次微分式：

$$ds^2 = \sum (dy_i)^2$$

这个式子可以写成：

$$ds^2 = \sum \frac{\partial y_i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y_i}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

这篇论文便是围绕着这个主题展开了。由于上式可写为：

$$u_{\alpha} = \sum \frac{\partial y_i}{\partial x^{\alpha}} d(\frac{\partial y_i}{\partial x^{\beta}} r^{\beta})$$

对右边微分，可得：

$$u_{\alpha} = a_{\alpha\beta} dr^{\beta} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} r^{\beta} dx^{\gamma}$$

同理得另一对称式，综合两式可得：

$$\sum \frac{\partial y_i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}})$$

这样，就用克里斯托弗符号表示了线素，从而使微分几何推广到了高维、弯曲的坐标系中了，这是张量分析的最重要的应用。

[①] J. L. Coolidge, *A history of geometrical methods*. Oxford, (1940), p421.

"里奇和契维塔引进的新的算法，为任意维数流形的内蕴几何提供了严格的基础，这方面的新思想已经被高斯、黎曼、贝尔特拉米、克里斯托弗发现，这个协变微分或绝对微分的算子，使得爱因斯坦从狭义相对论关于物理学的外部概念，发展到广义相对论的内蕴几何观念。[①]"这是数学上的一场革命。公元前3世纪形成的欧几里的几何学到17世纪才发展出坐标算法和微分运算，用了近2000年的时间；这种局面到了19世纪发生了根本性的变化，高斯1827年提出的内蕴思想（即弯曲空间的观念）到1896年已经实现了广义坐标中的绝对微分运算，仅仅70年左右的时间跨度。20世纪里，数学所呈现出的加速发展更加明显，如果说19世纪末的彭加勒被称为全才数学家的话，那么他是最后一个贯通数学诸领域的通才，20世纪没有这样的情况发生。

之所以说这是一场革命，是因为如下事件所形成的标志性特征。1.欧几里得几何学为托勒密天文学提供了数学工具，表现出欧几里得几何学的实际意义：真实空间的观念模拟。这种思想一直绵延到18世纪的拉格朗日天体力学中。张量分析及黎曼几何学的出现，使得新的宇宙模型得以实现，这从现实的角度证实了新几何学的革命性发展。2.欧几里得几何学自诞生起，就起着为自然科学提供了背景空间的作用，一切物质行为都发生在欧几里得空间中。而现在，科学的背景被替换成了黎曼空间，至少在关于宇宙和粒子的科学中是这样。3.一直以来，人们认为数学是不存在革命的，因为这是一门纯演绎的学科。但也有观点认为几何学不在其列，因为几何学具有与物理学类似的特性。姑且不论哪种观点更有道理，单且就黎曼几何学把一门关于引力的自然科学改造成了几何学的模样，这本身就是一种革命。

[①] D.Gillies, *Revolutions in mathematics*, Oxford, (1995), p187.

第四节 爱因斯坦理论：张量分析的重述

张量分析在里奇手中建立起来以后，列维-契维塔和爱因斯坦对此进行了更深入的工作。在爱因斯坦和契维塔的书信往来中，我们可以看到，张量分析的物理意义在他们的手中更加清楚了。

1915 年 3 月 5 号，爱因斯坦写给契维塔第一封信，信中说[①]：

对于积分：$J=\int_{\Sigma} H\sqrt{-g}d\tau$

考虑线性变换：$\frac{1}{2}\Delta H=\sum g^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\frac{\partial^{2}\Delta x_{\mu}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\alpha}}$

由于度量张量的导数 $\delta g_{\sigma}^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\delta g^{\mu\nu}$，

得到：$\delta J=\int_{\Sigma}\wp_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d\tau$

其中：$\wp_{\mu\nu}=\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\right)$

显然，$\wp_{\mu\nu}/\sqrt{-g}$ 不是张量。

爱因斯坦所探讨的问题已经超出了里奇方法的范围，广义相对论不仅仅是绝对微分法的简单应用，而是在很大的程度上发展了它的问题集，促进了张量分析以及黎曼几何学的发展。

爱因斯坦在《广义相对论基础》[②]一文中，系统总结了张量分析方法，我们将较为详细地摘引爱因斯坦的文章，这有两个目的：第一，可以更好地理解爱因斯坦的思想；第二，作为张量分析的一个较为清晰的概述，以便于理解这门数学分支。

我们所要考察的情况与曲面的二维描述中存在的情况相类似，高斯的曲面理论与广义相对论间最重要的交汇点在于它们的度规性质。高斯的论点如下：两个无限接近的点之间的距离 ds，可以作为平面几何的基础。 通过适当选取笛卡尔坐标系，

① C.Cattani, *The 1915 Epistolary controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita*, in *The attraction of gravitation: new studies in the history of general relativity*, Berlin, 1953, p174-200

② A.Einstein, *Die grundlage der allgemeinen relativitatstheorie*. in Annalen der physik, 1916, vol.49, p769-822.

这个距离可以表示成 $ds^2=dx_1^2+dx_2^2$。在这个量的基础上，我们可以把直线理解为测地线，进而有了间隔、圆以及角度等概念。如果我们注意到曲面的一块无穷小区域可以在相对无穷小量的程度上被看作平面，那么就可以在连续曲面上建立欧氏几何。

在曲面的无限小区域里，可以取笛卡尔坐标 X^1 和 X^2，两点之间的距离为：

$$ds^2=dX_1^2+dX_2^2$$

如果在曲面上引入任意曲面坐标 x_1，x_2，则 dX_1，dX_2 可以由 dx_1，dx_2 线性表示。那么在曲面上处处都有：

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$$

在物理学的四维时空连续统里，也存在类似的关系。表为：

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

定义了曲面的度规表示之后，爱因斯坦转入了引力场区域的度规表示：

总的来说，有限范围内的时空区域不是伽利略区域，因此在有限的区域里不能通过坐标系的选取来消除引力场。但对于连续统中的两个相邻点（事件），不变量 ds 总是存在，这个不变量 ds 可以用任意坐标来表示。如果注意到局域的 dX_v 可以由坐标微分 dx_v 线性表示，那么 ds^2 可以表示成：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

这个关系式就是黎曼在 1854 年的求职演说中提出的 n 维弯曲流形的度量形式。爱因斯坦说："在相对论产生以前，数学家们就已经建立了推广的张量演算理论。黎曼首先把高斯的思路推广到了任意维连续统，他很有预见地看到了对欧几里得几何进行这种推广的物理意义。随后，这个理论以张量微积分的形式得到了发展，对此里奇和列维-契维塔做出了重要的贡献。"

爱因斯坦随后以他非凡的物理学直觉，和高超的理论思维对张量分析的一些最为重要的数学概念以及运算作了一个简单而不肤浅的介绍。这里，我们仅写出爱因斯坦文中的一部分，来体会他对张量数学的理解。

尽管前面已经证明，形成张量的代数运算与线性正交变换下不变量理论的特殊情况是同样简单的，但不幸的事，在普遍情况下，不变量的微分运算比特殊情况复杂许多。

在普遍情况下仍然存在张量的不变量微分运算，这可以极为满意地由下述方法得到：

由于 $g_{\mu\nu}$ 诸量确定连续统的所有度规性质，因此我们考虑由矢量 A^{ν} 构成的不变量：

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$$

由于它是不变量，在平移之后不应当改变。于是我们有：

$$0=\delta(g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu})=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}A^{\mu}A^{\nu}dx_{\alpha}+g_{\mu\nu}A^{\mu}\delta A^{\nu}+g_{\mu\nu}A^{\nu}\delta A^{\mu}$$

通过轮换指标 μ，ν，α，一共可以得到三个方程。利用克利斯托弗符号，并考虑到克利斯托弗符号的对称性，我们得到：

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}=g_{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$$

爱因斯坦的重述体现了深厚的物理学底蕴，更为清晰地讲述了张量分析方法。回顾张量分析的发展史，黎曼是很重要的人物，他将高斯的几何学思想推广到了大于 2 的情形。其次重要的是克里斯托弗，他抓住了黎曼提出的“四指标符号”的核心，给出了计算曲线坐标系中的向量微分的计算符号：“克里斯托弗符号”。第三个人是爱因斯坦（以及他背后的格拉兹曼），他使张量分析成为重要的数学物理方法。

物理上完全等价，这就是推广了的相对性原理——非惯性系的“等效原理”。这个假说的启发性意义在于，它允许用一个匀加速参照系来代替一个均匀引力场，这使得在一般参照系变换下，物理方程形式不变的广义协变性有了实现的可能，即自然定律在任何参照系中都可以表示为相同的数学形式[①]。　　以现在的眼光来看，几何学与引力场有内在的关联：物质的存在使空间的性质发生了变化，大质量物体的周围空间要发生弯曲，这可以用黎曼几何加以描述。如果把黎曼空间的度规与闵可夫斯基的广义矢量数学结合起来，就可以建立空间度规与引力场的依赖关系。

爱因斯坦与格罗斯曼一起，致力于寻找一个对于时空度规 $g_{\mu\nu}$[②]来说满足广义协变性要求的微分方程，这样就等于放弃了牛顿用标量函数（即引力势）[③]描述引力场的方法，而改用空间的度量张量这样的几何量来描述引力。如何用这个张量来构造一个满足广义协变性要求的微分方程呢？这对爱因斯坦来说是完全陌生的数学问题，在格罗斯曼的帮助下，很快发现上面的问题早已由克里斯托弗、里奇和契维塔解决了。在与格罗斯曼的合作中，爱因斯坦把绝对微分学，即里奇张量演算引入了

① A.W.Joshi, *Horizons of Physics*, New York, 1989, p18.
② $g_{\mu\nu}$是四维时空中的二阶张量，具有10个独立函数。
③ 牛顿定律的引力可以根据泊松方程中的引力势来表示：$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$

物理学，为建立广义协变性引力理论开辟了道路。1913 年，爱因斯坦与格罗斯曼发表了著名论文“广义相对论与引力纲要”，在这篇论文中，爱因斯坦建立了时空度规与引力场相关联的引力方程[①]。

这被称为“引力场的几何化”，也就是用非欧四维空间的弯曲度来描绘引力。当初爱因斯坦通过电梯内的感受说明等价原理，也就是一个加速度的效应等价于一重力在反方向上的效应的原理，说明一个均匀引力场效应，能够用相反方向上的匀加速参考系代换。但是，实际的引力场每一点都不同，并不均匀，所以只能将局部点的引力场等效于不变的加速度，反过来说，这个加速度的大小从一点到另一点是变化的，因此广义相对论是时空局部的性质，局部的东西在数学上就是微分，因此引力场的“几何化”需要微分几何学。这样，微分几何学的现代形式——黎曼几何成为广义相对论的基本工具[②]。

用一个数学量把平坦地图上的距离转化为我们曲率空间中的距离，这个数学量称为这个空间的度规。度规的思想是一种把一般的距离（平坦空间中的距离）转化为曲率空间中的距离的方法。对于圆柱面和球面来说，曲面上的每个点用两个数可以确定这个曲面的曲率。我们指定两个数 g_{xx}、g_{yy} 代表度规，它们分别和我们的坐标系中的 x 方向和 y 方向的曲率相关。曲率空间中的距离表示为：$(ds)^2 = g_{xx}(dx)^2 + g_{yy}(dy)^2$。知道了空间度规，就可以找到测地线方程。

二阶张量是一个 4×4=16 个元的矩阵，可以用 B_{ij} 表示，

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

三阶张量是一个三维的数字块，有 4×4×4=64 个元，它可以用三个下表来表示，比如 C_{ijk}，这里的 i、j、k 可以是 1，2，3，4 中的任何一个。

爱因斯坦的场方程：$G_{ij} = 8\pi GT_{ij} + \Lambda g_{ij}$，完整地写为：

① S.Chandrasekhar, *Einstein and general relativity: history perspectives*, in *American journal of physics*, vol 47, (3)1979, p212－217

② J.Illy, *Einstein teaches Lorentz, Lorentz teaches Einstein: their collaboration in general relativity, 1913－1920*, in *Archive for history of exact science*, vol.39, (3)1989, p248-289.

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} = 8\pi G \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

爱因斯坦的方程实际上是 16 个方程(其中 10 个是独立方程)，用张量来表达非常简洁。G_{ij} 是爱因斯坦张量，g_{ij} 是度规张量，T_{ij} 能量动量张量。引力被看成用度规 g_{ij} 描绘的时空的曲率[①]。

爱因斯坦引力场方程的左边是几何量，右边是有关物质的量，自然规律再一次以出人意料的方式展现出来。在爱因斯坦看来，物理学的定律不应该依赖于空间坐标系的特殊选择，而应当在选择坐标系的情况满足“变换不变性”的要求，这在数学上这被称为“不变量”。物理定律在某种变换下的不变性的例子是守恒定律，它是不变性性质的推论。不变性概念并不是在广义相对论中才出现的概念，但它的重要性只有在相对论发展后才充分体现出来。狭义相对论意味着经典动力学的方程式在彼此作匀速相对运动的参考系中并无区别。但此前试图将这个相对性原理扩展到电磁现象时并不成功，即麦克斯韦电磁场方程在空间、时间坐标的伽利略变换下并不是不变的，而牛顿方程在这种变换下则是不变的。而广义相对论则是使相对性原理从惯性系（即匀速相对运动的系）推广到任意运动的参照系（数学中称为坐标系），这意味着在任意的时空坐标变换下物理定律保持不变[②]。

爱因斯坦广义相对论认为物理定律在所有任意运动系中都是不变的（即具有相同的数学形式），为此目的所用的合适数学工具是张量分析。一个张量的变换性质是由坐标的变换定律定义的，一个物理量满足在坐标变换下不变的性质，总能用张量形式加以表达，而一条物理定律总能被表述成一个张量方程的形式，因为物理定律反映的是自然界固有的客观性质。一旦这样做了，它在坐标变换下的不变性就被揭示出来了。所以说张量演算是处理与广义坐标变换有关的协变性概念的自然数学语言。也正因为广义相对论的成功，使人们看到了张量解析的实际意义，以及它的物理学含义。爱因斯坦曾说：“今天才刚刚看到 Gauss, Riemann,

---

① J Stachel, *Einstein's search for general covariance, 1912-1915*, in *Einstein and the history of general relativity* Boston, 1989, p63-100

J.Norton, *How Einstein found his field equation*, in *Einstein and the history of general relativity* , Boston, 1989, P101-314.

J.Isenberg, *Mihematical studies of the field equations*, in *General relativity and gravitation*, World scientific Co. 2005 P199-209.

J.D Norton, *Einstein, Nordstrom and the early demise of scalar, Lorentz-Covariant theories of Gravitation*, in *Archive for history of exact science*, vol 45, (1)1992, p17-94.

② F.R.Hickman, *Electrodynamical origins of Einstein's theory of general relativity*, in *International journal of theoretical physics*, vol.23, (6)1984, p535-566.

Christoffel,Ricci 等人所建立的一般微分学方法的真正胜利。[1]”今天，张量分析已经成为微分几何学[2]的必要工具。

我们来看看爱因斯坦 1913 年的论文中，建立场方程的出发点。

借助于任意的变换：

$$x' = x'(x,y,z,t)$$
$$y' = y'(x,y,z,t)$$
$$z' = z'(x,y,z,t)$$
$$t' = t'(x,y,z,t)$$

则有：

$$ds'^2 = g_{11}dx'^2 + g_{22}dy'^2 + \cdots + 2g_{12}dx'dy' + \cdots$$

因此，我们得以确信，在一般情况下，引力场由 10 个空间-时间函数：

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

来描述。[3]

爱因斯坦的中心目的是：“在通常的相对论中，只容许正交线性变换。我们可以指出，为了描述引力场对物质过程的作用，可以组成对于任意变换都是协变的方程。”这个目的在这篇论文中没有实现，要到 1915 年，完全协变的场方程才被建立起来。

2　希尔伯特的方案

按照包利（Pauli）的观点，希尔伯特是广义相对论场方程的另一个独立发现者[4]，这个观点是有根据的。希尔伯特是明可夫斯基的朋友，前面我们已经知道明可夫斯基的四维时空流形是从狭义相对论向广义相对论过渡的关键理论。希尔伯特从 1902 年开始对物理问题进行研究，与明可夫斯基有密切的接触。尤其是明可夫斯基 1909 年去世之后，希尔伯特对物理的投入是很大的，从 1910 到 1918 年，希尔伯特

[1] A.Einstein, *Zur allgemeinen relativitatstheorie*, in *Sitzungsberiche derKoniglichen preussischen Akademie Wissenschaften*, 1913, Berlin.
[2] 这种微分几何学称为黎曼几何。
[3] A.Einstein, *Zum gegenwartigen stande des gravitationsproblem*, in Physikalische zeitschrift. 1915, p1249-1266.
[4] W.Pauli, *Theory of relativity*, 1958, New York: Pergamon Press, p145.

用了很多时间研究物理问题[①]。

1915 年，希尔伯特找到了场方程的表达式[②]，我们来看希尔伯特的方法：

考虑四维弯曲空间的两个定积分：

$$I_1 = \int R\sqrt{-g}d^4x,$$

$$I_2 = \int R\sqrt{-g}d^4x$$

下面将看到，通过变分 $\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = 0$ 将得到和爱因斯坦理论相同的场方程。

先求 I_1 的变分：

从 $R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\varepsilon\\ \alpha\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix}$ 中看出，$R_{\mu\nu}$ 可以作为 $g^{\mu\nu}$ 以及 $g_\alpha^{\mu\nu}$ 的导数的函数，于是：

$$\delta I_1 = \int \delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x + \int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})d^4x$$

而

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \delta\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\nu\varepsilon\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\delta\begin{Bmatrix}\nu\varepsilon\\ \alpha\end{Bmatrix} - \delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\delta\begin{Bmatrix}\varepsilon\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix}$$

由于克里斯托弗符号的协变导数

$(\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix});\rho = \frac{\partial}{\partial x_\rho}\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\rho\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix}\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \alpha\end{Bmatrix}\delta\begin{Bmatrix}\alpha\nu\\ \sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\rho\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\delta\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \sigma\end{Bmatrix}$ 是一个张量，于是张量 $\delta R_{\mu\nu}$ 就可以简化为：

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix});\nu - (\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix});\alpha$$

由里奇定理，有：

$$\delta I_1 = \int(g^{\mu\alpha}\delta\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \beta\end{Bmatrix} - g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix});\alpha\sqrt{-g}d^4x + \int(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d$$

根据高斯定理，这个四维体积分可以化为边界上的面积分，但边界上一切变分为零，因此得：

$$\delta I_1 = \int(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

---

① J. Mehra, *Einstein, Hilbert, and the theory of gravitation: history origins of general relativity theory*, Boston, 1974.p17

② D.Hilbert, *Die Grundlagen der physik*, in Nachr. Ges. Wiss. Gott. 1915, p395.

δI_2 的计算与前面的求法类似，所不同的是需要建立场源物质的能量张量 $T_{\mu\nu}$ 的方程，最终得到：

$$\delta I_2 = \int k T_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \delta g_{\mu\nu} d^4 x$$

由 $\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = 0$，可得：

$$\int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + k T_{\mu\nu}) \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d^4 x = 0$$

因此：$R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -k T_{\mu\nu}$ ，这正是引力场方程。

第二节 黎曼几何学：

张量分析的数学实现

今天才刚刚看到 Gauss,Riemann,Christoffel,Ricci 等人所建立的一般微分学方法的真正胜利。

——爱因斯坦

"张量"的原始形式由里奇（Gregorio Ricci-Curbastro，）在 1890 年前后提出，当时里奇称之为"协变系统"，是他的绝对微分学的基本概念。1901 年，里奇和他的学生列维 契维塔（Tullio Levi-Civita，）发表"绝对微分学"一文，系统提出了张量算法，并用这种方法构建了黎曼 1854 年构想的 n 维弯曲空间的几何学，现在被称为黎曼几何学。这种几何学有两个以前的几何学从未有过的特点：一个是将几何对象本身作为空间，不再将几何体置于外围空间中；另一个是发展出曲线坐标系中的微分方法，从而将向量分析（三维、笛卡尔坐标系中的多值函数分析）推广到了更加抽象、更加普适的水平。需要说明的是，人们一提到张量，总会把张量的最大特点归结为"与坐标系无关"，但这只能算作张量的特点之一，而不能算是主要特点，事实上，这是向量的主要特点。张量分析最大的特点是能够处理一般坐标系（不仅不正交，而且坐标轴是弯曲的）中的问题，而不再局限于三维笛卡尔坐标系。

正因为黎曼几何学（以高维曲线坐标系中的微分学——绝对微分学，作为基本工具）具有这两个特点，先天地为广义相对论准备好了数学方法。黎曼，准确地说是高斯之前的几何，总是把曲线、曲面嵌入到外部的高维空间进行研究。但宇宙没有"外面"， 人们永远只能在宇宙"里面"。于是，广义相对论天然的要求一个研究内禀几何性质的几何学，这样的几何对象，不需要外部空间的存在。另一方面，闵可夫斯基已经把爱因斯坦在狭义相对论中的时间、空间统一体抽象成四维几何对象，所以广义相对论还需要一个高维几何学方法，黎曼几何学正好符合这些方面的要求。广义相对论的数学表达第一次揭示了黎曼式非欧几何的物理意义，成为历史上数学应用最伟大的案例。

1 外尔的总结

1918 年，外尔（H.Weyl,1885-1955）写了《引力与电》[1]一文，这篇文章的开头部分总结了张量分析与黎曼几何的基本内容，在这篇论文中，外尔首次使用了"Riemannian geometry(黎曼几何)"一词[2]。

他开宗明义地指出："黎曼在当时要贯彻他的思想简直是不可能的，而今天，爱因斯坦正是在这个思想的基础上，建立了他那广义相对论的大厦。"这是黎曼几何学的成功，是张量分析的成功。"黎曼几何碰巧起源于曲面论，而随后产生的这种几何学运用于我们的世界时，以出人意料的方式不仅解释了引力现象，而且也解释了电磁现象。"黎曼几何之所以有这样的效力，是因为"关于物质如何影响测量的规律不外就是引力定律。"也就是说，黎曼几何揭示了客观世界所固有的性质。

在这篇文章之后，外尔在 1919 年又写了《黎曼假设，几何学的基础》[3]一文，外尔把当时已经成熟的黎曼几何学的结论与黎曼 1854 年的设想相对照，进行了系统论述。这成为黎曼几何学最终形成的标志。外尔说：

从欧几里得几何学到黎曼几何学的过渡，建立在这样的观念转变的基础之上：物理学的基础从一段距离的运动转变为无限邻近的两点间的运动。通过观察我们发现，流过导体的电流与导体末端的电势成正比，这就是欧姆定律。但是，我们确信这个测量结果应用到长导线的时候，不能表达为物理定律最一般的形式。根据我们已经掌握的表述，麦克斯韦理论被建立起来了，我们从数学过程的积分定律推导出微分定律。

欧几里得几何学的基础是两点间距离的平方是一个与这两点坐标相关的二次形式，这就是毕达哥拉斯定理。但是，如果这个定律仅仅在两点无限接近的时候才严格有效，这个时候，我们就进入了黎曼几何的领域了。从欧几里得的有限几何到黎曼的无穷小几何，与物理学的情况类似。

黎曼几何要求满足连续性条件，并且包含更一般的特征。欧几里得几何对直线和平面适用，它的发展导致了解决问题的新方法。一旦我们进入微分几何，在黎曼

---

[1] H.Weyl, *Gravitation und elektrizitat*, 1918, Sitzungsberichte der preussischen akad. Wissenschaften, p201-216. 这篇论文是规范变换的开端。

[2] 郝刘祥的博士论文《赫尔曼·外尔：关于空间问题的数理分析和哲学思考》的第一章就是讲述外尔对黎曼几何思想的阐发，但是没有指出"Riemannian geometry"的辞[illegible]

[3] H.Weyl, *B.Riemann uber die hypothesen,welche der geometrie zu grunde liegen*(1919), in *gesammelte mathematische werke*, 1990 , p740-768.

制定的无穷小性质方面，一切都变得自然而合理。然而，欧几里得的空间观念假定外部空间比曲面内蕴的性质要简单许多，但黎曼意识到空间概念足以克服这种偏差。获得外部世界知识的原则，是从它的无穷小部分的表现来描绘。这就是黎曼几何学。

由于黎曼几何从根本上改变了欧几里得几何的传统，外尔在接下来的论述中，几乎逐条解释了黎曼1854年的论文中所设想的内容，展现了黎曼的构想在后来所实现的形式。

外尔从黎曼设想的流形的度量形式：$ds^2=g_{ik}du_idu_k$开始，这个二次微分形式其实就是后来50多年的研究的起点。从这里，人们首先得到张量的概念，以及两类克里斯托弗符号，接着展开协变微分运算，进而找到测地线方程，最后完成黎曼曲率的计算。

在这看似简单明了的步骤中，凝聚了两代数学家不懈的努力。从外尔开始，黎曼几何和张量分析进入了一个新的阶段，他和嘉当一起，为建立在规范变换不变性基础上的数学物理学开辟了道路。

1922年，外尔出版《空间、时间和物质》[①]一书，更为系统地总结了黎曼几何学。外尔从n维几何概念开始，逐一讨论了度量几何、欧几里的空间中张量、非欧几何的注记、张量代数、张量分析等内容。有了这些基础之后，外尔总结了黎曼几何学的内容。他说：

非欧几何的关键性发展是黎曼作出的。这一步骤建立在微分几何的基础上，尤其是高斯的名著《曲面的一般研究》。我们在讨论这个主题的时候，将仅仅以线性变换的不变量理论为基础。

曲面上无限接近的两点（u_1, u_2）和（u_1+du_1, u_2+du_2）的距离ds由下式决定：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

如果我们设：

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}du_2$$

我们可以得到：

$$ds^2 = \sum g_{ik}du_idu_k$$

其中系数是：

[①] H. Weyl, *Space time and matter*, 1922, London, METHUEN & GO. LTD.

$$g_{ik}=\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k}+\frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k}+\frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}$$

上式无穷小平行四边形的面积等于：

$$\sqrt{g}\begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix}$$

这是外尔论述黎曼几何的起点，在全书的论述中，外尔坚持一个基本的思想："黎曼几何是局域的欧几里得几何。"

2 契维塔的发展

契维塔在 1926 年出版了他的名著《绝对微分学》，其中第二篇讨论了张量分析在几何学中的应用。不过他没有使用"黎曼几何学"这个名词，而是说成"二次微分式的几何学"。

契维塔从曲面的参数表示开始他的综合论述。然后，和外尔一样，契维塔的起点是黎曼提出的二次微分形式，但是契维塔并不像外尔那样线条清楚地描绘新几何学的主要内容，而是展开了许多与古典微分几何学相同的论题，不过契维塔采用了张量形式来表达。这里显示出纯粹数学家和有物理学倾向的数学家的思路不大一样，事实上，数学成就只有用于物理学之后，才能清楚起来。

契维塔的论题包括：

1)、两方向间之夹角：$\cos\theta=\sum\frac{dy_i}{ds}\frac{\delta y_i}{\delta s}=\sum\frac{\partial y_i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial x^\beta}p^\alpha p^\beta$

2)、曲面上之向量：$\mathfrak{z}\cdot\varsigma=\sum r^\alpha s_\alpha$

3)、曲面的绝对几何学：

a)、曲面基本方程：$\frac{\partial b_{\mu\alpha}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial b_{\mu\beta}}{\partial u^\alpha}+\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}b_{\sigma\beta}-\Gamma^\sigma_{\mu\beta}b_{\sigma\alpha}=0$

b)、测地线方程：$\ddot{u}^\lambda+\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0$

按照爱因斯坦的说法，张量分析的历史是由黎曼、里奇和列维-契维塔写成的。而契维塔则直接与爱因斯坦就广义相对论进行过讨论，他们之间有较为频繁的书信

往来[①]。从这个角度看，契维塔的作用要更大。1927年，契维塔发表《测地线理论》[②]一文，这篇论文与外尔的著作角度不同，契维塔更多地是从张量分析的角度进行总结，而没有象外尔那样，主要是从黎曼几何的角度进行的。

在这篇论文中，契维塔直接从黎曼的二次微分形式得出：

$$x_i{}' = -\sum_{jh} \begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix} x_j x_h$$

而不是像爱因斯坦和外尔那样对这个二次形式进行物理上的解构。这是数学家与物理学家在解决问题的方法上的区别。契维塔直接使用了克里斯托弗和里奇的协变微分，所以有这样直接的结论。

契维塔引进辅助条件：

$$\sum_{jh} \begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix} \lambda^j \lambda^k = 0$$

这使得张量分析在建立测地线方程的时候，更为方便。概而言之，契维塔不仅参与建立了张量分析，而且极大地推进了这种一般坐标系中的分析方法。包括引进联络概念，以及对张量分析法的简化。

[①] C.Cattani, The 1915 epistolary controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita, in Einstein studies: the universe of general relativity, Berlin, 2005, p175-200.
[②] T.Levi-Civita, *Sur lecart geodesique*, in *Mathematatische annalen*, 1927, vol.97, p291-321.

结 束 语

1 论文的主要发现

张量数学的建立过程中，下述几个方面是至关重要的，而在已有的研究中被忽略了。首先是微分几何领域：第一，高斯借用欧拉的参数方程来表示曲面，这为黎曼建立高维的几何对象观念做好了准备；第二，凯莱明确表达了向量的代数定义，这为引进张量概念开辟了道路；第三，贝尔特拉米开创微分形式不变量研究，这为克里斯托弗发现协变微分法奠定了基础。其次是电动力学领域：第一，考证出 tensor 的最早含义；第二，考证了张量概念的物理学起源，提出电动力学是张量概念的思想源头，而不是弹性力学。当时电动力学的核心的问题是寻找电磁场方程的协变性，以现在的眼光看来就是寻找新的参照系间的变换公式。在这个过程中，明可夫斯基在电磁学的层面触及到了张量概念，他提出一种广义矢量（1908 年），实质上就是张量。诺德斯托姆和劳厄则分别独立使用 tensor 指称张量（1910 年）。最后，关于“张量分析”这个名词的最早使用者，论文考证出：不是爱因斯坦最早使用的，他当时称之为“张量演算”，最早使用 tensor analysis 的是外尔，外尔同时提出了 Riemannian geometry(黎曼几何)这个词。

2 开放性论题

论文现有的结论是整个工作的开始，还有很多内容需要去研究。张量分析方法彻底改变了几何学乃至数学的发展方向，这种方法一经建立，数学表达世界的能力就极大地加强了。虽然张量分析方法在今天仍是它原初的形式，但它应用的方式却产生了很大的变化。本文没有涉及关于“联络”方面的内容，这是由契维塔提出、外尔推广的现代微分几何概念，本质上等价于协变微分。这个概念之所以重要，是因为它是通向“纤维丛”概念的必要过渡。本文较显生硬地结束在 1923 年，对其后的发展不做考察了，而留待以后持续不断地去研究其历史。这是因为：到 1923 年，现代微分几何的基本方法——张量分析被完整地建立起来了，而这是根本性的变化，其后的发展是对此的延续。

即便就是 1840 到 1923 这样短暂的时间范围内，仍然有非常多的细节没有涉及到。比如李普西兹、克利福德、比安其、克罗内克对张量分析的建立也在某些问题

上做出了贡献，但由于他们的影响不是根本性的，更重要的是资料方面的困难，暂时没有去研究，这些也是日后的工作中需要去补足的内容。

另外一个未涉及到的论题是关于张量数学产生和发展的社会学考察，也就是外史方面的问题。在绪论中曾提到："在本文的写作过程中，坚持一个原则：数学本身能够揭示出概念的根源，而忽略数学家生活的社会在怎样的程度上影响了数学的进化。 19 世纪数学的抽象化程度非常之高，远远超过了 18 世纪，但是这种进步背后的原因不像 17 世纪近代科学产生之初，生产实际对科学提出许多迫切需要解决的问题那样直接推动了近代科学的产生。这或许是因为科学的巨大成功，为数学家创造了极其宽松的思维空间；抑或是因为第二次工业革命对科学的发展起了间接的推动作用。但不管怎样，数学的成果更多地是数学家的智力活动所创造出来的。"这样的结论非常粗糙，与事实本身也许有着相当大的出入。因此，这个论题同样需要在日后的研究中予以补足。

还有一个论题是张量数学在中国的引进、传播和发展过程，这个题目非常大，本篇论文无力涉及。汉语中，"张"有"排列"之意[①]，例如唐代孔颖达的《<周易正义>序》有："日月星辰，布设张列"之说，而张量的矩阵表达正是数组的排列。这就产生了一个问题：最早翻译 tensor 的人是怎样想到用"张量"而不是其他词语的？这个问题尚不清楚，甚至尚不清楚是谁做出这个翻译的。

根据《日本数学 100 年史》记载，日本成立"张量数学会"是 1937 年，1938 年出版"张量"会刊，[②]但是这本书没有提到日本最早使用"张量"名词的人。因此这是另一个有待研究的问题：最早做出这个翻译的是日本人还是中国人？

在集中于这个论题的两年间，伴随着无数次发现原始文献的欣慰。这在国外本不是什么特别的事情，但在国内则是一件比较困难的事。好在这些原始文献基本上找到了，尽管可能存在解读中的种种偏差，但是本着忠于文本的精神，努力分析了张量概念，还是得到了一些有根据的结论，遗留问题将在今后不断努力解决。

[①]汉语大词典-缩印本（上卷）　罗竹风主编　汉语大辞典出版社　1986
[②] 日本数学 100 年史，岩波书店，1984，p364

原始文献：

1. G. F. B. Riemann, *Commentatio mathematica,qua respondere tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae* (1861) Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische werke,collected papers, p423—455.

2. G. F. B. Riemann, *Uber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen*(1854) Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische werke,collected papers , p272—287.

3. W. Voigt, *"Ueber das Doppler'sche Princip"*, Gottinger Nachrichten, (1887), (vol. 7): p41-51.

4. W. Voigt, *"Theorie des Lichts für bewegte Medien"*, in *Annalen der Physik*, (1888), 35: p370-396, p524-551

5. N. Lobachevsky, in *O nacalax geometrii*, 1829, Kazanskij, p185-261.

6. J.Bolyai, *La science absolue de l'espace*, 1832, Maros, p189-248.

7. A. Cayley, On the Non-Euclidian geometry, in Mathematics Annalen, vol.v, 1872, p630-634.

8. C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, in *Carl Friedrich Gauss Werke*, ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.4, Leipzig: Teubner, 1870, p217-p258.

9. C.F. Gauss, *Carl Friedrich Gauss Werke*, ed. Koniglicher Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, vol.8, Leipzig: Teubner, 1900, p166. p168

10. L.Euler, *Novi community of Acadamy of science*, 19(1774), p340-p370.

11. H.Grassmann, *Lineale Ausdehnungslehre*, 1844, Leipzig.

12. Grassmann, *Theorie der ebbe und flut*, in *Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische werke*, vol.3, p6, Leipzig, 1894-1911

13. A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127.

14. A.Cayley, *On Jacobi's elliptic functions and on quaternions*, in *Philosophical Magazine*, vol.xxvi. (1845), p208,211.

15. A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127.

16. B.Riemann, *Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen*, (1854), in *Werke*, Springer, 1892, p272-287, transl. by W.K.Clifford, *Nature*, vol. 8, Nos. 183,184, p14 -17, 36, 37

17. G.F.B.Riemann, *Uber die hypothesen,welche der geometrie zu grunde liegen*(1854) Bernhard Riemann,Gesammelte mathematische werke,collected papers, p272—287.

18. G.F.B.Riemann, *Commentatio mathematica,qua respondere tentatur quaestioni ab Academia Parisiensi propositae* (1861) Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische werke,collected papers*, p423—455.

19. H.Grassmann, *Linear extension theory*, 1994, transl. by L.C.Kannenberg, *Ausdehnungslehre*, (1844).

20. H.Grassmann, , *Ausdehnungslehre*, 1862 , transl. by L.C.Kannenberg, *Linear extension theory*, 2000, American mathematical society, p13-17.

21. A.Cayley, *On linear transformation*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, vol.I,(1846),p104-122

22. A.Cayley, *On the theory of liner transformation*, in *Cambridge mathematical journal*, vol.IV, (1845), p193-209

23. A.Cayley, *On linear transformation*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, vol.I,(1846),p104-122

24. A.Cayley, *Chapters in the analytical geometry of n- dimensions*, in *Cambrige mathematical journal*, vol.4, (1843), p119-127

25. A.Cayley, *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of*

hyperdeterminant, in *Philosophical magazine*. 1851, p391-410.

26. A.Cayley, *An introductory memoir on quantics*. in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1854, 144, p109-125
27. A.Cayley, *A second memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1856,146,p101-126
28. A.Cayley, *A third memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1856,147,p43-56
29. A.Cayley, *A fourth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1858, 148,p415-427
30. A.Cayley, *A fifth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1858,149,p420-460
31. A.Cayley, *A sixth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1859, 150,p61-90
32. A.Cayley, *A seventh memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London* 1861, 151, p277-292
33. A.Cayley, *A eighth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1867,157, p513-554
34. A.Cayley, *A ninth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1871,161, p17-50
35. A.Cayley, *A tenth memoir on quantics*. in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1878, 169, p603-661
36. A.Cayley, *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminant*, in *Philosophical magazine*, 1851, p391-410
37. A.Cayley, *A sixth memoir on quantics*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 1859, 150,p61-90
38. J.Sylvester, *On the general theory of associated algebraical forms*. in *Cambridge*

and Dublin mathematical journal, VI. (1851), p289-293.

39. J.Sylvester, *On a remarkable discover in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*, in *Philosophical magazine*, II, (1851), p391-410.
40. J.Sylvester, *On the principle of the calculus forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VII. (1852), p52-97
41. J.Sylvester, *On the principle of the calculus forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VII. (1852), p179-217
42. J.Sylvester, *Note On the calculus of forms*, in *Cambridge and Dublin mathematical journal*, VIII. (1853), p62-64
43. J.Sylvester, *On the theory of the syzygetic relation of two algebraical functions* ,in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, CXLIII, (1853), p407-548
44. A.Cayley, *Nouvelles recherches sur les covariants*, in *Journal fur die reine und angewandte sur les covariants*, tom. XLVII, (1855), p109-125.
45. A.Cayley, *A memoir on the theory of matrices*, in *Philosophical transactions of the Royal society of London*, vol. CXLVIII, (1858), p17-37.
46. William R.Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1866.
47. O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p42.
48. O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p142.
49. O.Heaviside, *Electromagnetic theory*, 1893, vol. 1, London, p187.
50. William R.Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1899, p136.
51. William R.Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, London, 1899, p164.
52. W.Voigt, *"Ueber das Doppler'sche Princip"*, *Göttinger Nachrichten*, (1887) vol. 7, p41-51; Reprinted with additional comments by Voigt in *Physikalische Zeitschrift* XVI, p381-386 (1915).
53. F.Klein A.Sommerfeld, *Theory des kreisels*, vol.4, Leipzig, 1910, p939.
54. M. Kline, *Mathematical thought from to modern times*, vol.3, New York, Oxfoed

university press, 1972, p1123.

55. 爱因斯坦 格罗兹曼，广义相对论纲要和引力论，《爱因斯坦文集》第二卷，1977年，商务印书馆，p224.

56. H.Mimkowski, *Die grundgleichungen fur die elektromagnetischen vorgange in bewegten korpern*(1908), in *Gesammelte abhandlungen von hermann minkowski*, 1911, p352-404.

57. H.Mimkowski, *Espace et Temps*, in *Annales ecole normale superieure*, 1909, Paris, p499-517.

58. G. Ricci, Méthodes de calcul différentielabsolus et leurs applications, Mathematische Annalen,54 (1901),p128－201.

59. H.A.Lorentz, Collected papers, vol. I-vol. IX, Matinus Nijhoff, 1935-1939

60. H.A.Lorentz, *Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media*, in Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, 18, 1878, p2-119

61. H.A.Lorentz, *La theorie electromagnetique de Maxwell son application aux corps mouvants*, in Arch. Neerl. 25, 1892, p164-321

62. H.A.Lorentz, *The theorem of poynting concerning the energy in the electromagnetic field and two general propositions concerning the propagation of light*, in Versl. Kon.Akad.Wetensch. Amsterdam. 4, 196, 1896.

63. H.A.Lorentz, *Sur les vibrations de systemes portant des charges electriques et places dans un champ magnetique*,in Arch.Neerl. 2, 78, 1899.

64. A.Einstein, *Lichtgeschwindigkeit und statik des gravitationsfeldes*, in *Annalen der physik*, 1912, vol.38, p355-369

65. A.Einstein, *Zur theorie des statischen gravitationsfeldes*, in *Annalen der physik*, 1912, vol.39, p443-475

66. A.Einstein, Relativitat und gravitation, in *Annalen der physik*, 1912, vol.40,

p1059-1063

67. G.Nordstrom, *Zur elektromagnetischen mechanik*, in *Physikalische Zeitschrift*, 1910, (5), p440-445.

68. W.Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung, Leipzig, 1898.

69. G.Nordstrom, *Originalmitteilungen*, in *Physikalische Zeitschrift*, 1909, (2), p681-687.

70. G.Nordstrom, *Trage und schwere masse in der relativitats-mechanik*, in *Annalen der physik*, 1913, vol.40, p856-878.

71. G.Nordstrom, *Zur theorie der gravitation vom standpunkt des relativitatsprinzips*, in *Annalen der physik*, 1913, vol.42, p533-554.

72. M.Laue, *Zur dynamik der relativitatstheorie*, in *Annalen der physik*, vol.35, p524-542.

研究文献：

1. Webster's Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language 1994, dolithium press Ltd. New York.
2. 现代汉语大辞典. 王同亿主编. 海南出版社. 1992.
3. E. Portnoy , *Riemann's contribution to differential geometry,* Historia mathematica, 9 (1982), p1－18
4. J. L. Coolidge,' *A history of geometrical methods* , Oxford, （1940）, p421
5. J.L. Richards "The geometry traditon: mathematics, space, and reason in the nineteenth century," *The Cambridge history of science,* 5(2003), p464
6. Bernhard Bavink, *Ergebnisse und probleme der naturwissenschaften,* ed. Zurich, 1949, p45, 115.
7. Max Jammer, *Concepts of space,* Harvard university, 1969, p147.
8. Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford university, 1972, p872-873.
9. Edmund Hoppe, *C.F. Gauss und der euklidische Raum,* Naturwiss, 1925, 13, p743-744.
10. Arthur Miller, *"The myth of Gauss" experiment on the Euclidean nature of physical space,* Isis, 1972, 63, p345-348
11. W.K. Buhler, *Gauss: A biographical study,* Berlin, Springer, 1981, p100.
12. H.S.M. Coxeter, "Gauss as a geometer," Historia mathematics, 4(1977), p388.
13. E.T. Bell , *Men of mathematics: the lives and achievements of the great mathematics from Zeno to Poincare*, 1937, London, p320.
14. M. Jonye, *The Cambridge history of science:The modern physical and mathematical science*, 5(2003), p459.

15. N. Kolmogorov, *Mathematics of the 19th century*, 1996, Birkhauser, p77-78.
16. R.Tobies, *The reception of H. Grassmann's mathematical achivements, in Hermann Gunther Grassmann(1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, G. Schubring, Kluwer academic publishers, London, 1996, p119.
17. D.Flament, *1830-1930: A century of geometry*, Springer, 1992, p22-34
18. E. Portnoy ,*Riemann's contribution to differential geometry*, *Historia mathematica*, 9 (1982), p1—18
19. J.Dieudonne, *The tragedy of Grassmann*, Linear and multilinear algebra 8, (1979), p1-14.
20. D.Hestenes, *Grassmann's vision, in Hermann Gunther Grassmann(1809-1877): Visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, 1996, Kluwer Academic publishers, p191-201.
21. D.F.Sander, *Hermann Grassmann and the creation of linear algebra*, American mathematical monthly, 10(1979), p809-817.
22. D.F.Sander, *Hermann Grassmann and the prhistory of universal algebra*, American mathematical monthly, 9(1982), p161-166.
23. Dictionary of scientific biography, vol.5, 1975, New York, Charles scribner's sons.
24. J.L. Richards, *Projective geometry and mathematical progress in Mid-Victorian Britain*, Studies in the history and philosophy of science, 17(1986), 297-325
25. K.H.Parshall, *James Joseph Sylvester:Life and work in letters*, Oxford, 1998, p25
26. J.Norton, *Einstein, Nordstrom and the Early demise of scalar, Lorentz-Covariant theories of gravitation*, in Archive for history of exact science, 45: 1992, p17-94.

博士期间的学术成果

1. 黄勇. 张量概念的起源与演变(J). 数学的实践与认识，2008,1
2. 黄勇,魏屹东. 张量分析历史研究(J). 科学技术与辩证法， 2008，3
3. 黄勇,魏屹东. 安清翘的音律计算法和他的等比数列研究(J). 山西大学学报（哲社版）， 2008，3
4. 黄勇. 张量分析的孕育与产生(J). 中国科技史杂志(拟录用)
5. 黄勇,魏屹东. tensor 的历史演变(J). 太原理工大学学报，2008，1
6. 黄勇. 日月五星左、右旋之争：安清翘的左旋会通(J). 华侨大学学报（哲社版），2006，1

致　谢

论文终于完成了。在这个充满挑战的过程中，我感谢所有帮助过我的老师和同学。国家图书馆的老师使得我在国门之内，找到所需要的外国数学家的原始文献。我特别要感谢其中的杨镇、张艳霞、张汉群三位国图的老师，她们给我极其耐心的帮助。这同时是一种精神支持，因为如果没有原始文献，我的关于科学史的论文将是无根之木，也就不存在继续做下去的意义。我还要感谢山西省图书馆借阅部许老师、山西大学科哲中心资料室孙立真老师，她们在中、英文张量数学教材方面给予我很大的帮助。

我要感谢科学院数学与系统科学研究所李文林老师、自然科学史研究所汪前进老师和刘钝老师。李老师为论文提供了多方面的宝贵意见并为我提供了很多便利条件，李老师提示我关注格拉斯曼在张量数学发展过程中的重要作用，这引导我发现了“张量”的含义是“扩张”，而不是“张力”；汪老师提示我要关注各类词典对 tensor 的解释，并注意其中有无词源，并亲自为我借来了不少重要资料；刘老师对我论文的中肯意见，使我受到了极大的鼓励和深刻的教育。

最后，我要感谢我的导师魏屹东老师。魏老师一再教育我“做学问一定要广博”，此时此刻，我终于明白“广博”不仅是学识渊博，更重要的是要有广博的胸怀和宽广的视野。魏老师从方法论的高度一次又一次地提高了我的分析和综合能力，正如魏老师所说：“没有分析就没有深度，没有综合就没有高度。”我从中受益匪浅。

三年时间转瞬间已成过眼烟云，留下的是深深镌刻在我脑海中的无限感激。我将始终怀抱着这颗感恩的心，来面对生命中的每一次激动和每一份伤感。

黄勇

2008 年 5 月

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

学位论文作者（签章）：黄勇

2008年6月12日